باسمه تعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

بیژن معاونی

(استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران)

نیمسال اول ۸۹-۹۰

باسمه تعالی

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 1

مقدمه

تئوری کنترل

- تئوری کنترل یک شاخه میانی از علم است مابین مهندسی و ریاضات.
- کنترل:

مجموعه ای از اجزا و سیستم ها که در کنار یکدیگر قرار می گیرند به منظور دست یافتن به رفتار مطلوب.

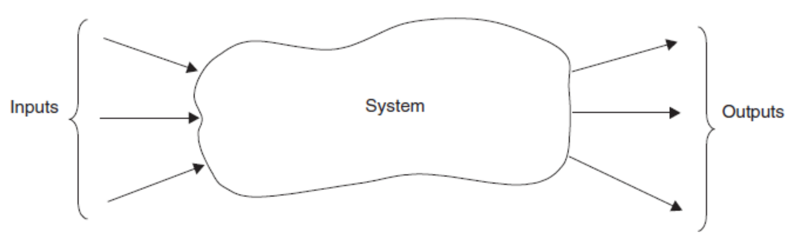
- سیستم:

سیستم برای افراد مختلف می تواند نماد یا تعریف های متفاوتی داشته باشد.

مانند: اتومبیل، ماشین لباسشویی، ماشین CNC و ...

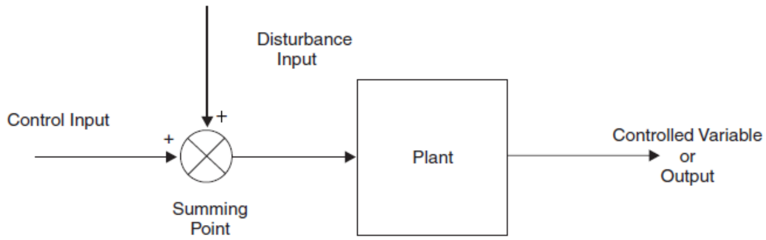
سیستم

- ولیکن تمامی سیستم ها دارای مشترکاتی در تعریف هستند:
  - سیستم ها دارای **ورودی** هستند
  - سیستم ها دارای **خروجی** هستند که با تغییر در ورودی ها می توانند تغییر کنند.
  - سیستم های میتوانند بیش از یک ورودی و/یا بیش از یک خروجی باشند.



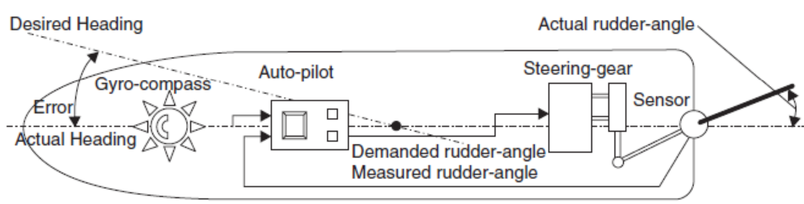
کنترل و لزوم شناخت سیستم

- خروجی سیستم در اثر تغییر در ورودی تغییر می یابد که به آن **پاسخ سیستم** گویند.
- مهندسی کنترل می کوشد تا با **مدل سازی سیستم** پاسخ خروجی سیستم را نسبت به ورودی های مختلف تخمین بزنند.
- انواع ورودی:
  - ورودی کنترل - ورودی های اغتشاش



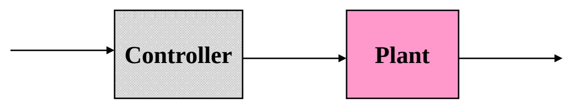
5

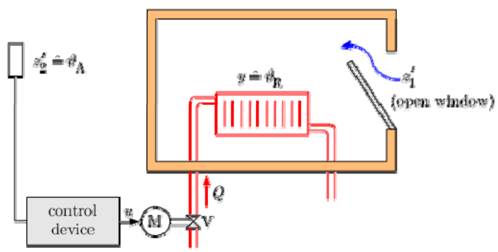
مثالی از یک سیستم

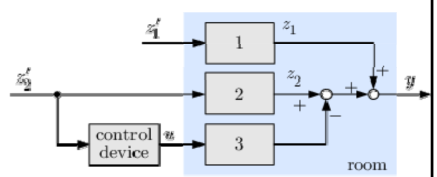


سیستم کنترل حلقه باز

- سیستم کنترل حلقه باز (*Open loop Control*)

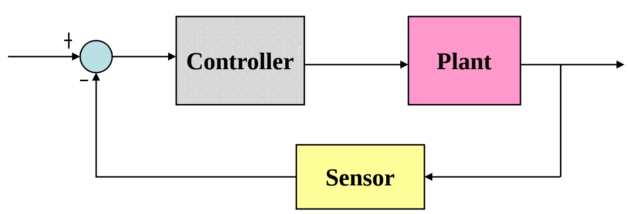


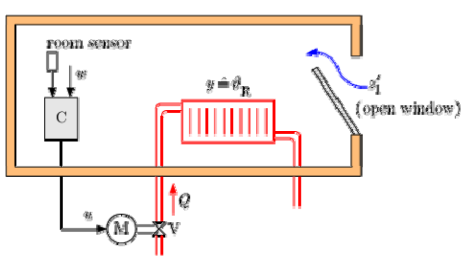


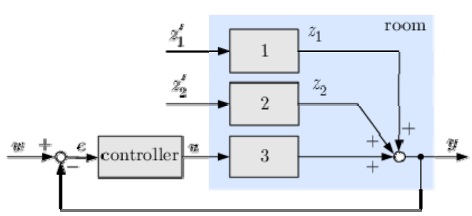


سیستم کنترل حلقه بسته

- سیستم کنترل حلقه بسته (*Closed loop Control*)







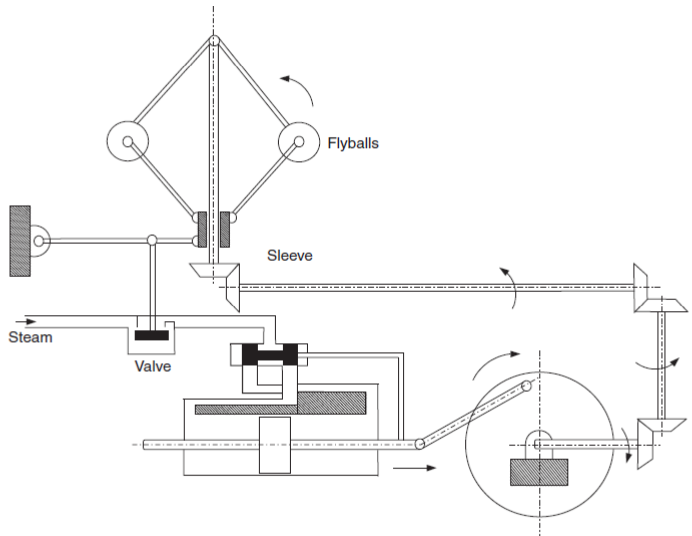
نتایج مد نظر از درس کنترل اتوماتیک

- در درس کنترل اتوماتیک هدف دست یافتن به موارد زیر است:
  – مدل سازی و توصیف سیستم های خطی
  – تحلیل دینامیک سیستم های خطی
  – تحلیل اثر حضور فیدبک در سیستم های کنترل حلقه بسته
  – طراحی کنترل کننده

تاریخچه کنترل

- 1642-1754
  - The work of I. Newton (1642-1727) and G.W. Leibniz (1646-1716), the brothers Bernoulli (late 1600's and early 1700's), J. F. Riccati (1676-1754) led to the discovery of the infinitesimal calculus which in turn helped the development of differential equations theory. ([26])
- 1736-1865
  - J. L. Lagrange (1736-1813) and W. R. Hamilton (1805-1865) established the use of differential equations in analyzing the motion of dynamical systems. ([26])
- 1868
  - J. C. Maxwell analyzed the stability of Watt's flyball governor. ([26])
- 1877
  - E. J. Routh provided a numerical technique for determining when a characteristic equation has stable roots. ([193])
  - I. I. Vishnegradsky analyzed the stability of regulators using differential equations independently of Maxwell. ([194])
- 1892
  - A. M. Lyapunov studied the stability of nonlinear differential equations using a generalized notion of energy. ([1], [26])

گاورنر جیمز وات



تاریخچه کنترل

- 1892-1898
  - O. Heaviside invented operational calculus and studied the transient behavior of systems, introducing a notion equivalent to that of the transfer function. ([26])
- 1893
  - A. B. Stodola studied the regulation of a water turbine using the techniques of Vishnegradsky. ([26])
- 1895
  - A. **Hurwitz** solved independently the problem of determining the stability of the characteristic equation. ([195])
- 1920-1939
  - P. S. de Laplace (1749—1827), J. Fourier (1768—1830), A.L. Cauchy (1789—1857) developed the frequency domain approaches at Bell Telephone Laboratories, and explored and used these in communication systems. ([26])

تاریخچه کنترل

- **1927**
  - H. S. Black demonstrated the usefulness of negative feedback. ([196])
- **1932**
  - H. Nyquist developed Regeneration Theory for the design of stable amplifiers and derived his Nyquist Stability Criterion based on the polar plot of a complex function. ([197])
- **1938**
  - H.W. Bode used the magnitude and phase frequency response plot of a complex function and investigated closed-loop stability using the notions of phase and gain margin. ([198])
- **1945-1955**
  - The first textbooks on Control Theory appeared which discussed straightforward design tools and provided great insight and guaranteed solutions to design problems. ([204], [205], [206], [207], [208])
- **1947**
  - N. B. Nichols developed his Nichols chart for the design of feedback systems. ([26], [201])
- **1948**
  - W. R. Evans presented his root locus technique, which provided a direct way to determine the closed-loop pole locations in the s-plane. ([202])

سرفصل درس کنترل اتوماتیک

کنترل اتوماتیک

کد درس : ۵۳
تعداد واحد : ۲
نوع واحد : نظری
پیشنیاز : ارتعاشات مکانیکی
سرفصل دروس : (۳۴ ساعت)

۱- تعریف و طبقه‌بندی سیستمها، مدل ریاضی سیستمها، دیاگرامهای بلوکی، کلیاتی در مورد فیدبک و اثرات آن.

۲- پاسخ زمانی سیستمها، حالت گذرا و ماندگار، مشخصات حالت گذرا،(جهش، زمان، شکست ...) و حالت ماندگار (خطای ماندگار)، بررسی اثر کنترل‌کننده‌هابرمشخصات حالت گذرا و ماندگار سیستم.

۳-پایداری، روش راث - هورویتس (Routh-Hurwitz)

۴-روش مکان هندسی ریشه‌ها (root Locus)

۵-پاسخ فرکانسی سیستمها، روشهای نمایش پاسخ فرکانسی، بررسی پایداری سیستمها در میدان فرکانس(روش نایکویست)، مشخصات پاسخ فرکانسی (حد فاز و بهره، ماکزیمم تشدید و...)

۶-تنظیم کنترل‌کننده‌ها و وضوح جبران‌کننده‌ها برای بهبود کار سیستمهای کنترل.

سرفصل درس کنترل اتوماتیک

۱- مقدمه
۲- مدل سازی سیستم های خطی
۳- تابع تبدیل, نمودار بلوکی و نمودر گذر سیگنال
۴- بررسی اثر فیدبک و مشخصات رفتاری سیستم در حوزه زمان
۵- تحلیل پایداری با استفاده از روش Routh_Hurwitz
۶- تحلیل پایداری با استفاده از مکان هندسی ریشه ها
۷- تحلیل پایداری با استفاده از روش نایکوئیست
۸- پاسخ فرکانسی و استفاده از تحلیل Bode
۹- طراحی جبرانساز ها در حوزه فرکانس
۱۰- طراحی کنترل کننده در حوزه فرکانس

ارزیابی

ارزیابی دوره:

- کوئیز (۶ نمره) (زمان کوئیز: جلسه بعد از اتمام هر فصل)
  - فصل ۱، ۲ (انتهای فصل دوم) فصل ۳(انتهای فصل سوم)
  - فصل ۴ (انتهای فصل چهارم) فصل ۵ (انتهای فصل پنجم)
  - فصل ۶ (انتهای فصل ششم) فصل ۷ (انتهای فصل هفتم)
- تمرین (۲ نمره) (مهلت تحویل: یک هفته بعد از اتمام هر فصل)
- پروژه در طول ترم و پایان ترم (۵ نمره)، (استفاده از نرم افزار MATLAB الزامی است.)
- پایان ترم (۷ نمره)

مراجع

- "سیستم های کنترل"، بنجامین کو, ترجمه علی کافی
- **"Modern Control Systems", R. C. Dorf**
- "سیستم های کنترل خطی"، دکتر علی خاکی صدیق، انتشارات دانشگاه پیام نور
- "کنترل", اگاتا, ترجمه علی کافی

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 2

مدل سازی سیستم های خطی

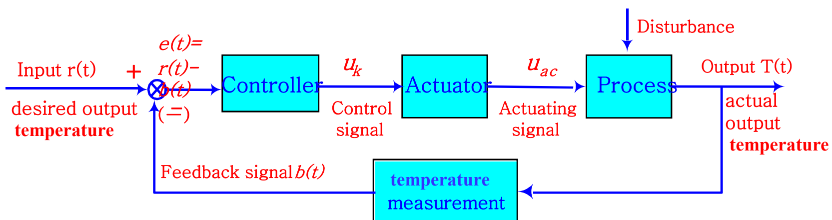
توصیف مدل دینامیکی

- سیستم های کنترل
  - سیستم های کنترل مبتنی بر مدل
  - سیستم های کنترل مبتنی مبتنی بر داده های ورودی-خروجی
- مدل سیستم
  - مدل ریاضی
  - مدل مستخرج از اطلاعات ورودی-خروجی
    - مدل مستخرج از شناسایی کلاسیک
    - مدل مستخرج از روشهای هوشمند
- مدل ریاضی
  - تابع تبدیل
  - مدل فضای حالت

توصیف مدل دینامیکی

- نیاز به توصیف ریاضی سیستم ها:
  - امکان توصیف و تحلیل ویژگی های سیستم
  - امکان بهره برداری از دستاورد های حوزه ریاضیات به منظور تحلیل و طراحی سیستم کنترل

مثال: نحوه محاسبه u_k به منظور دست یافتن به خروجی مطلوب



توصیف مدل دینامیکی

- توصیف ریاضی سیستم چیست؟
  - توصیف ارتباط دینامیکی (معادلات دیفرانسیل (ریاضی)) متغیرهای داخلی سیستم.

- دست یافتن به مدل سیستم
  - نوشتن معادلات فیزیکی و مدل سازی تئوری
  - روش ها تجربی
  - مدل ها مستخرج از اطلاعات ورودی-خروجی
    - » مدل مستخرج از شناسایی کلاسیک
    - » مدل مستخرج از روشهای هوشمند

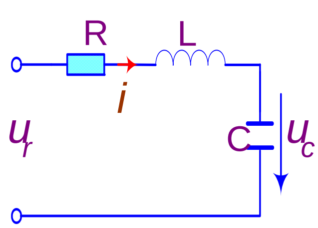
- ارزیابی مدل

توصیف مدل دینامیکی

- انواع مدل های توصیف دینامیکی سیستم
  - معادلات دیفرانسیل
  - توابع تبدیل
  - بلوک دیاگرام ها
  - معادلات فضای حالت
  - مدل های توصیفی (Descriptor)
  - مدل های هوشمند

توصیف مدل دینامیکی- معادلات دیفرانسیل

مثال:



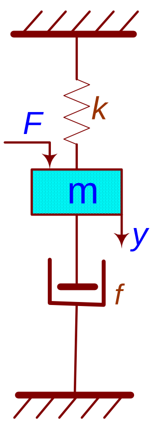
$$define:\ input \rightarrow u_r$$
$$output \rightarrow u_c.$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_c = u_r \quad i = C\frac{du_c}{dt}$$
$$\Downarrow$$
$$LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$make:\ RC = T_1 \quad \frac{L}{R} = T_2 \quad \Rightarrow \quad T_1T_2\frac{d^2u_c}{dt^2} + T_1\frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

توصیف مدل دینامیکی- معادلات دیفرانسیل

مثال:



$$Define:\ input \rightarrow F$$
$$output \rightarrow y$$

$$F - ky - f\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{d^2t}$$
$$\Downarrow$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = F$$

$$If\ \ we\ make\ :\ \ \frac{f}{k} = T_1,\quad \frac{m}{f} = T_2$$

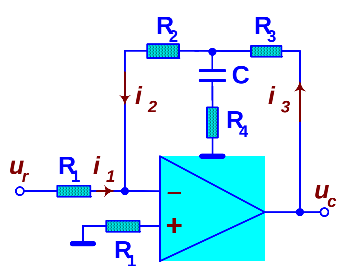
$$we\ have\ :\ \ T_1T_2\frac{d^2y}{dt^2} + T_1\frac{dy}{dt} + y = \frac{1}{k}F$$

دو سیستم مثال های دارای عملکرد مشابه هستند:

$u_c \rightarrow y;\ u_r \rightarrow F$

توصیف مدل دینامیکی- معادلات دیفرانسیل

مثال:



$$Input \rightarrow u_r \quad output \rightarrow u_c$$

$$u_c = R_3i_3 + \frac{1}{C}\int(i_3 - i_2)dt + R_4(i_3 - i_2)......(1)$$

$$i_2 = -i_1 = -\frac{u_r}{R_1}..(2)$$

$$i_3 = \frac{1}{R_3}(u_c - R_2i_2)..................................(3)$$

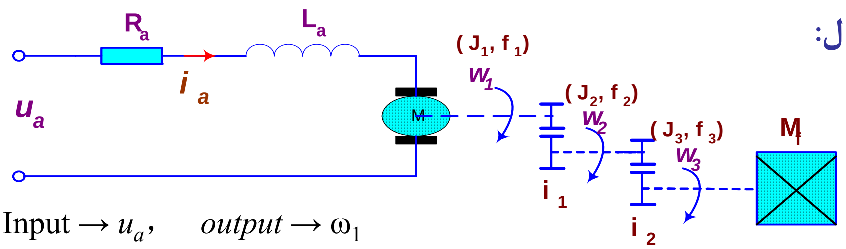
$$(2)\rightarrow(3);\ \ (2)\rightarrow(1);\ \ (3)\rightarrow(1):\quad R_4C\frac{du_c}{dt} + u_c = -\frac{R_2+R_3}{R_1}\left[\left(\frac{R_2\cdot R_3}{R_2+R_3} + R_4\right)C\frac{du_r}{dt} + u_r\right]$$

$$make\ :\ R_4C = T;\quad \frac{R_2 + R_3}{R_1} = k;\quad \left(\frac{R_2\cdot R_3}{R_2 + R_3} + R_4\right)C = \tau$$

$$we\ have\ :\ \ T\frac{du_c}{dt} + u_c = -k\left(\tau\frac{du_r}{dt} + u_r\right)$$

توصیف مدل دینامیکی- معادلات دیفرانسیل

مثال:



Input $\rightarrow u_a$, *output* $\rightarrow \omega_1$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + E_a = u_a \ldots.(1)$$

$$M = C_m i_a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

$$E_a = C_e \omega_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(3)$$

$$M - \overline{M} = \overline{J}\frac{d\omega_1}{dt} + \overline{f}\omega_1 \ldots..(4)$$

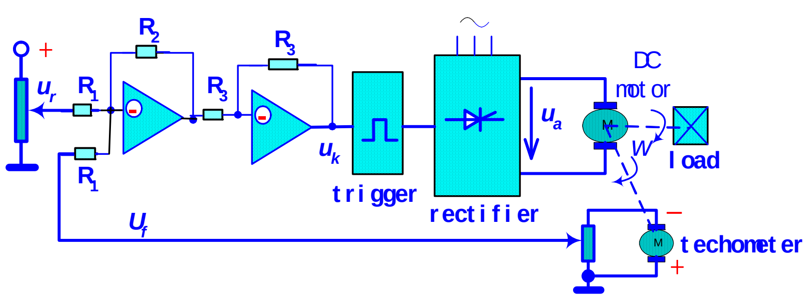
(4) → (2) → (1) and (3) → (1) :

$$\frac{L_a \overline{J}}{C_e C_m}\ddot{\omega}_1 + \left(\frac{L_a \overline{f}}{C_e C_m} + \frac{R_a \overline{J}}{C_e C_m}\right)\dot{\omega}_1 + \left(\frac{R_a \overline{f}}{C_e C_m} + 1\right)\omega_1$$

$$= \frac{1}{C_e}u_a - \frac{L_a}{C_e C_m}\dot{\overline{M}} - \frac{R_a}{C_e C_m}\overline{M}$$

توصیف مدل دینامیکی- معادلات دیفرانسیل

مثال:



Input $\rightarrow u_r$, *Output* $\rightarrow \omega$; *neglect the friction:*

$$u_k = \frac{R_2}{R_1}(u_r - u_f) = k_1(u_r - u_f) \ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots \ldots\ldots \ldots.(1)$$

$$u_f = \alpha\omega \ldots\ldots \ldots\ldots .(2) \qquad u_a = k_2 u_k \ldots\ldots \ldots\ldots ..(3)$$

$$T_e T_m \frac{d^2\omega}{dt^2} + T_m \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{1}{C_e}u_a - \frac{1}{C_e}(T_e T_m \dot{\overline{M}} + T_m \overline{M}) \ldots\ldots (4)$$

توصیف مدل دینامیکی- تابع تبدیل

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y$$
$$= b_0 r^{(m)} + b_1 r^{(m-1)} + b_2 r^{(m-2)} + \cdots + b_{m-1} r^{(1)} + b_m r ....n \ge m$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}, \quad \text{if } r(t) = \delta(t) \Rightarrow R(s) = 1}$$

$$2\ddot{c}(t) + 3\dot{c}(t) + 4c(t) = 5\dot{r}(t) + 6r(t)$$
$$\Downarrow$$
$$2s^2 C(s) + 3sC(s) + 4C(s) = 5sR(s) + 6R(s)$$
$$\Downarrow$$
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{5s+6}{2s^2+3s+4}$$

نمایش فضای حالت

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی متغیر با زمان:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t), u(t), t\right) \\ y = g\left(x(t), u(t), t\right) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی:

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t), u(t)\right) \\ y = g\left(x(t), u(t)\right) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم غیر خطی نسبت به ورودی خطی (**Affine**):

$$\begin{cases} \dot{x} = f\left(x(t)\right) + g\left(x(t)\right)u(t) \\ y = h\left(x(t)\right) \end{cases}$$

نمایش فضای حالت

- نمایش فضای حالت سیستم خطی متغیر با زمان (LTV):

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y = C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{cases}$$

- نمایش فضای حالت سیستم خطی نامتغیر با زمان (LTI):

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

- **لزوم خطی سازی:**

  - **سیستم های واقعی غیرخطی هستند.**
  - **خطی سازی حول نقطه کار (یا نقطه تعادل) می تواند تقریب مناسبی از رفتار سیستم غیرخطی را حول این نقطه ارائه نماید.**
  - **سیستم های کنترل خطی امکان کنترل سیستم های غیرخطی حول نقطه کار (یا نقطه تعادل) را دارا هستند.**
  - **سیستم های کنترل خطی دارای مقاومت بیشتری در مقابل نامعینی ها هستند و ایجاد امکان استفاده از این کنترل کننده ها با خطی سازی فراهم می گردد.**

خطی سازی سیستم های غیرخطی

- نقطه تعادل:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u=0\right) = 0 \;\Rightarrow\; x_{eq.p.} = x(t)$$

- نقطه کار:
  - نقطه کار ناشی از حضور یک ورودی:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), u(t)=\hat{u}\right) = 0 \;\Rightarrow\; x_{op.p.} = x(t)$$

  - نقطه کار معرفی شده توسط طراح:

$$x_{op.p.} = x_0$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

خطی سازی با استفاده از بسط سری تیلور تابع تحلیلی:

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left.\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\right|_{x_0} \left(x - x_0\right)^n$$

$$\longrightarrow\; f\left(\mathbf{x}(t)\right) = f(\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right|_{x_0} \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right) + H.O.T.$$

$$[J_x]_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{x_j}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

خطی سازی با استفاده از بسط سری تیلور تابع تحلیلی:

$$x(t) = x_0 + \Delta x \qquad u(t) = u_0 + \Delta u$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \Delta\dot{x}(t) = f\left(x_0(t), u_0(t), t\right) + J_x\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta x(t) + J_u\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta u(t)$$

$$\Delta\dot{x}(t) = J_x\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta x(t) + J_u\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta u(t)$$

$$\boxed{\Delta\dot{x}(t) = A(t)\Delta x(t) + B(t)\Delta u(t)}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

بطور مشابه برای معادله خروجی:

$$\Delta y(t) = g_x\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta x(t) + g_u\left[x_0(t), u_0(t), t\right]\Delta u(t)$$

$$\boxed{\Delta y(t) = C(t)\Delta x(t) + D(t)\Delta u(t)}$$

و برای یک سیستم نامتغیر با زمان:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

خطی سازی سیستم های غیرخطی

مثال:

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_1^2(t) - \sin(3x_2(t)) + u_1^3(t) - u_2(t) & = f_1(\mathbf{x},\mathbf{u})\\ \dot{x}_2(t) = x_2(t) + x_1(t)e^{-x_2(t)} - u_1(t) & = f_2(\mathbf{x},\mathbf{u})\end{cases}$$

$$\boxed{\text{Assumptions: } \begin{cases} x_{op.p.} = 0 \\ \hat{u} = 0 \end{cases}}$$

$$J_x[.] = \begin{bmatrix} 2x_1 & -3\cos(3x_2) \\ e^{-x_2} & 1 - x_1 e^{-x_2} \end{bmatrix} \qquad J_u[.] = \begin{bmatrix} 3u_1^2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

مدل سازی سیستم ها

مدل سازی سیستم های مکانیکی:

- مدل سازی بر اساس قوانین نیوتن
- مدل سازی بر اساس قوانین اولر-لاگرانژ
- ...

روش اولر-لاگرانژ:

۱- انتخاب متغیرهای مستقل $q_i = \begin{pmatrix} x_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$

۲- محاسه مجموعه انرژی های چنبشی (T) و پتانسیل (P) و تعریف لاگرانژین (L=T-V).

۳- مشخص نمودن نیروهای خارجی. $Q_i = \begin{pmatrix} F_i \\ \tau_i \end{pmatrix}$

۴- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

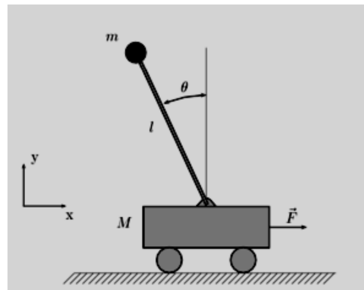
مدل سازی سیستم ها

مثال:

$$q=\begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$T=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

$$\begin{cases}\bar{x}=x+l\sin(\theta) \\ \bar{y}=l\cos(\theta)\end{cases} \longrightarrow \begin{cases}\dot{\bar{x}}=\dot{x}+l\dot{\theta}\cos(\theta) \\ \dot{\bar{y}}=-l\dot{\theta}\sin(\theta)\end{cases}$$



$$\longrightarrow \quad v^2=\dot{\bar{x}}^2+\dot{\bar{y}}^2=l^2\dot{\theta}^2+\dot{x}^2+2l\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad T=\frac{1}{2}m\left\{l^2\dot{\theta}^2+\dot{x}^2+2l\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta)\right\}+\frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$P=mgl\cos(\theta)$$

مدل سازی سیستم ها

$$L=T-P=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\dot{x}^2+ml\dot{\theta}\dot{x}\cos(\theta)+\frac{1}{2}M\dot{x}^2-mgl\cos(\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=F \longrightarrow \boxed{(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos(\theta)-ml\dot{\theta}^2\sin(\theta)=F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=0 \longrightarrow \boxed{ml^2\ddot{\theta}+ml\ddot{x}\cos(\theta)+mgl\sin(\theta)=0}$$

$$\begin{cases}x_1=x \\ x_2=\dot{x} \\ x_3=\theta \\ x_4=\dot{\theta}\end{cases} \longrightarrow \dot{\mathbf{X}}=f(\mathbf{X},u)$$

مثال: جستجوگر ژیروسکوپ آزاد

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3}(T_z + I_R \omega_s x_4)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r}(T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

استفاده از نرم افزار MATLAB به منظور خطی سازی.

- Trim
- Linmod

باسمه تعالی

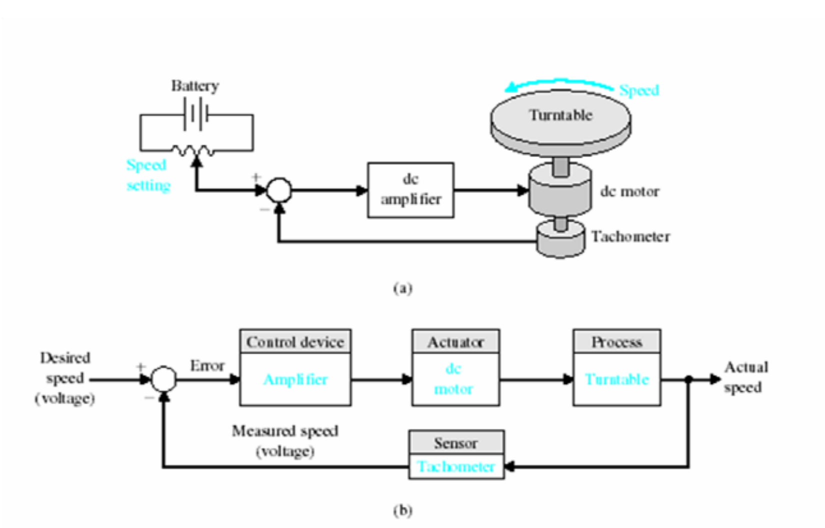
سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 3

نمودار بلوکی، نمودار گذر سیگنال

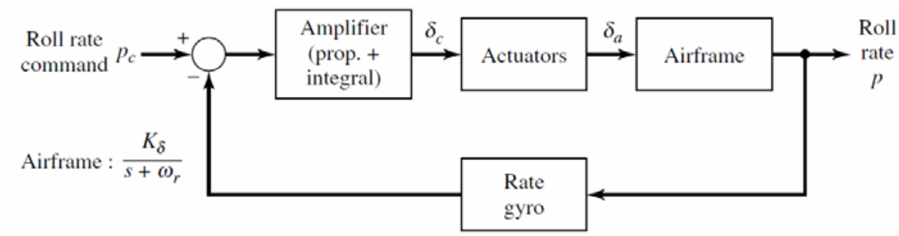
توصیف مدل دینامیکی

- توصیف سیستم به صورت دیاگرام بلوکی



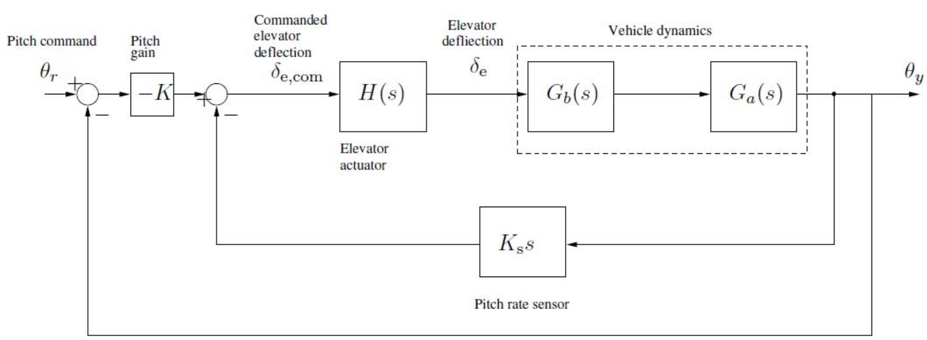
توصیف مدل دینامیکی

- مزایای توصیف سیستم به صورت بلوک دیاگرام:
  - امکان توصیف اجزا تشکل دهنده سیستم
  - امکان بررسی و تحلیل ارتباط زیر سیستم ها و تعامل ما بین آنها
  - امکان بیان معادلات در جهت دست یافتن به حل آنها



توصیف مدل دینامیکی

مثال

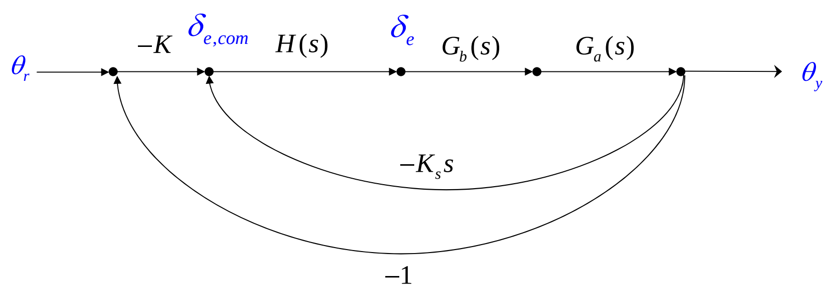


$$G(s) = G_a(s)G_b(s) = \frac{-0.125}{s^2+0.226s+0.0169}\,\frac{s+0.435}{s+1.23}$$

$$H(s) = \frac{2}{s+2} \qquad K_s = 1 \qquad K = 15$$

Signal Flow Graph

دامه مثال: (نمودار گذر سیگنال)



Mason Method

مثال

Given an SFG with N forward paths and K loops, the gain between the input node y_{in} and output node y_{out} is [3]

$$M = \frac{y_{\text{out}}}{y_{\text{in}}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{M_k \Delta_k}{\Delta} \qquad (3\text{-}54)$$

where

y_{in} = input-node variable

y_{out} = output-node variable

M = gain between y_{in} and y_{out}

N = total number of forward paths between y_{in} and y_{out}

M_k = gain of the kth forward paths between y_{in} and y_{out}

$$\Delta = 1 - \sum_i L_{i1} + \sum_j L_{j2} - \sum_k L_{k3} + \dots \qquad (3\text{-}55)$$

L_{mr} = gain product of the mth $(m = i, j, k, \dots)$ possible combination of r nontouching loops $(1 \leq r \leq K)$.

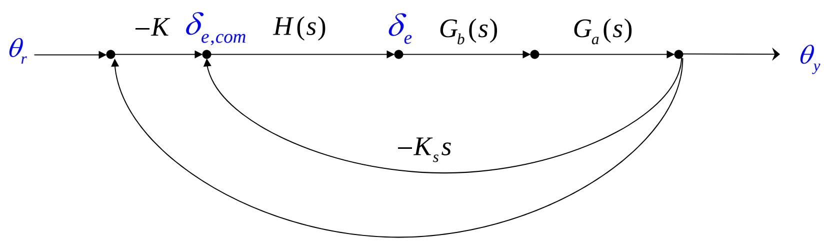
or

Δ = 1− (sum of the gains of **all individual** loops) + (sum of products of gains of all possible combinations of **two** nontouching loops) − (sum of products of gains of all possible combinations of **three** nontouching loops) + ⋯

Δ_k = the Δ for that part of the SFG that is nontouching with the kth forward path.

Signal Flow Graph

ادامه مثال: (نمودار گذر سیگنال)



$$M_1 = -KH(s)G_a(s)G_b(s) \leftrightarrow \Delta_1 = 1$$

$$l_1 = -K_s sH(s)G_a(s)G_b(s)$$

$$l_2 = KH(s)G_a(s)G_b(s)$$

$$\Delta = 1 - l_1 - l_2$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_y}{\theta_r} = \frac{M_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{-KH(s)G_a(s)G_b(s)}{1 + K_s sH(s)G_a(s)G_b(s) - KH(s)G_a(s)G_b(s)}$$

استفاده از MATLAB

دستورات مرتبط MATLAB:

mfile	Simulink
tf	linmod
parallel	
series	
feedback	
minreal	

: example1.m

$$G_{cl.m} = \frac{3.75s + 1.631}{s^4 + 3.456s^3 + 2.957s^2 + 4.252s + 1.673}$$

$$G_{cl.Sm} = \frac{3.75s + 1.631}{s^4 + 3.456s^3 + 3.207s^2 + 4.361s + 1.673}$$

تاثیر فیدبک

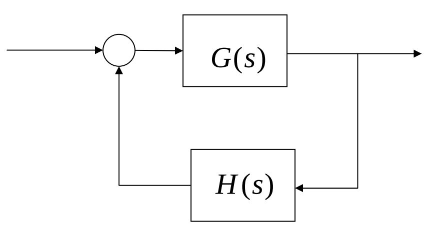
اثرات فیدبک مناسب:

- کاهش حساسیت
- بهبود حالت گذرا
- کاهش اثر نویز
- کاهش اثر اغتشاش
- کاهش دامنه خطا

تاثیر فیدبک-کاهش حساسیت

حساسیت (**Sensitivity**):

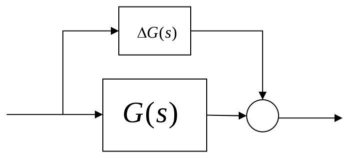
نسبت درصد تغییرات تابع تبدیل کل سیستم به در صد تغییرات یک زیر سیستم یا یک پارامتر



$$T(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$$

$$S_G^T=\frac{\dfrac{\partial T}{T}}{\dfrac{\partial G}{G}}=\frac{\partial T}{\partial G}.\frac{G}{T}=M(s)$$

تاثیر فیدبک-کاهش حساسیت



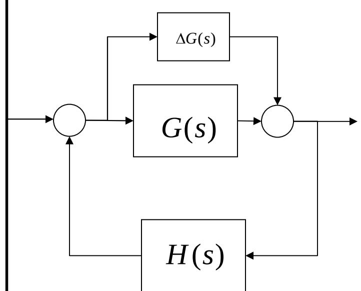
سیستم حلقه باز:

$$y(s)+\Delta y(s)=\big(G(s)+\Delta G(s)\big).R(s)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta y(s)=\Delta G(s).R(s)$$

$$T_o(s)=G(s)\Rightarrow S_G^T=1$$

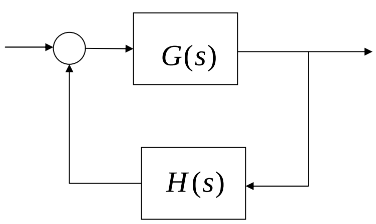


سیستم حلقه بسته:

$$y(s)+\Delta y(s)=\frac{\big(G(s)+\Delta G(s)\big)}{1+H(s)\big(G(s)+\Delta G(s)\big)}.R(s)$$

$$\Delta y(s)=\frac{\Delta G(s)}{\big(1+H(s)\big(G(s)+\Delta G(s)\big)\big)\big(1+H(s)G(s)\big)}.R($$

تاثیر فیدبک-کاهش حساسیت

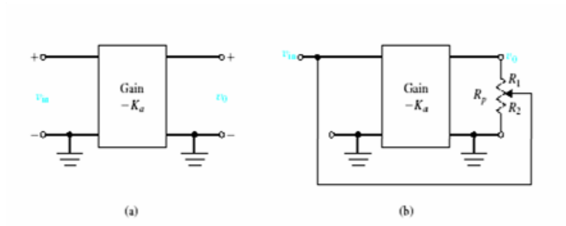


سیستم حلقه بسته:

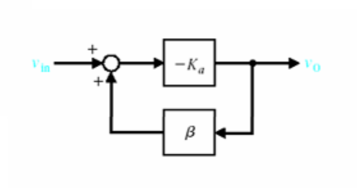
$$G(s)>\Delta G(s) \quad \Rightarrow \quad \Delta y(s)=\frac{\Delta G(s)}{\big(1+H(s)G(s)\big)^2}.R(s)$$

$$S_G^{T_{cl}}=\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

تاثیر فیدبک-کاهش حساسیت



(a) Open loop amplifier.
(b) Amplifier with feedback.



Open loop

$v_o = -K_a \cdot v_{in}$

$T = -k_a$

$S_{Ka}^{\ T} = 1$

Closed loop

$\beta = \frac{R2}{R1}$ $\quad R_p = R1 + R2$

$T = \frac{-K_a}{1 + K_a \cdot \beta}$ $\quad S_{Ka}^{\ T} = \frac{1}{1 + K_a \cdot \beta}$

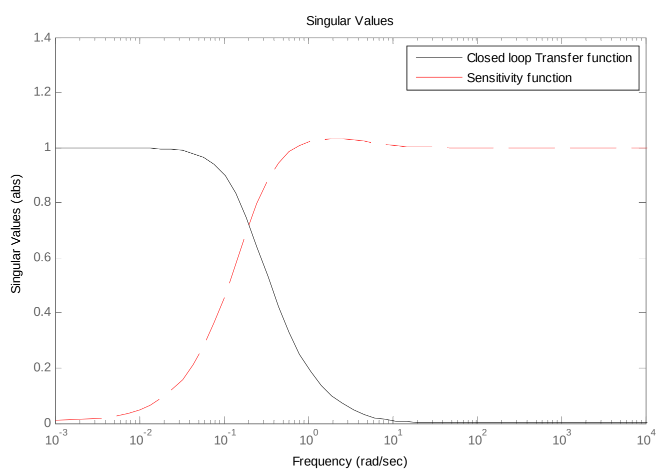
If Ka is large, the sensitivity is low.

$K_a := 10^4$ $\quad \beta := 0.1$ $\quad S_{Ka}^{\ T} = \frac{1}{1 + 10^3} = 9.99 \times 10^{-4}$

تاثیر فیدبک-کاهش حساسیت

بررسی تابع حساسیت در حوزه فرکانس:

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+5)(s+2500)}$$

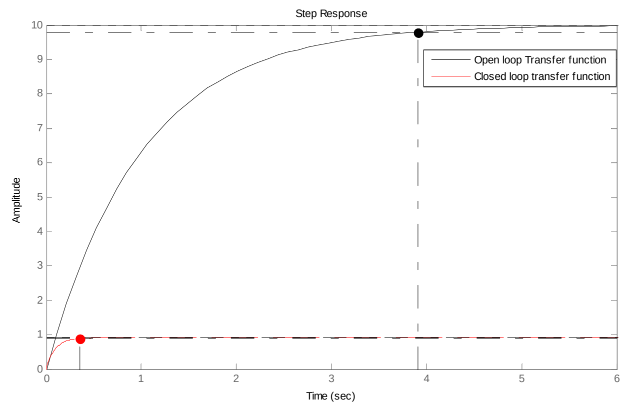


4

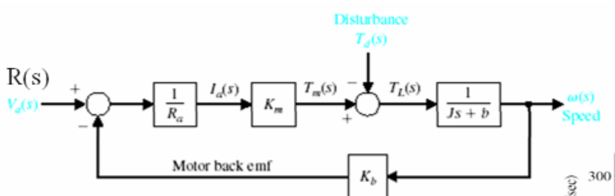
تاثیر فیدبک-بهبود پاسخ حالت گذرا

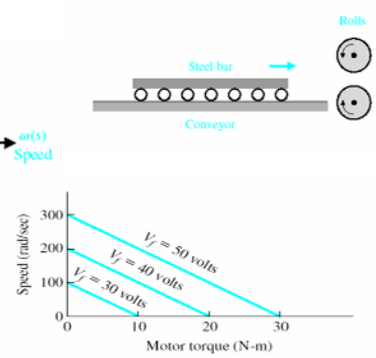
بهبود پاسخ حالت گذرا:

$$G(s)=\frac{k}{\tau s+1}\qquad T_{cl}(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{k}{\tau s+k+1}=\frac{\frac{k}{k+1}}{\frac{\tau}{k+1}s+1}$$



تاثیر فیدبک-کاهش اثر اغتشاش





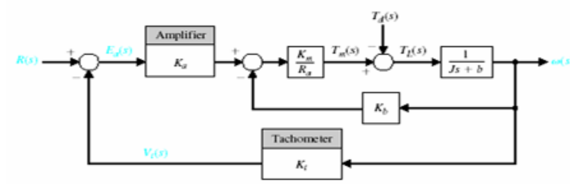
$$E(s) = R(s) - \omega(s) \qquad R(s) = 0$$

$$E(s) = -\omega(s)$$

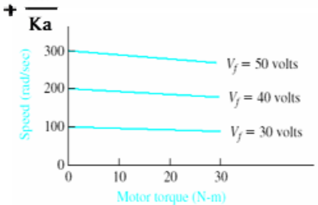
$$E(s) = -\omega(s) = \frac{1}{\left[J\cdot s + b + \left(Km\cdot\frac{Kb}{Ra}\right)\right]}\cdot Td(s) \qquad Td(s) = \frac{D}{s}$$

$$\lim_{t\to \text{infinite}} E(t) = \lim_{s\to 0} s\cdot\left[\frac{1}{J\cdot s + b + \left(Km\cdot\frac{Kb}{Ra}\right)}\right]\cdot\left(\frac{D}{s}\right) = \frac{D}{b + \left(Km\cdot\frac{Kb}{Ra}\right)} = -\omega(\text{infinite})$$

تاثیر فیدبک-کاهش اثر اغتشاش



$G1(s) = Ka \cdot \frac{Km}{Ra}$ $\quad G2(s) = \frac{1}{(J \cdot s + b)}$ $\quad H(s) = Kt + \frac{Kb}{Ka}$



$$E(s) = -\omega(s) = \frac{G(s)}{1 + G1(s) \cdot G2(s) \cdot H(s)} \cdot Td(s)$$

$G1G2H(s) > 1$

$$E(s) = \frac{1}{G1(s) \cdot H(s)} \cdot Td(s)$$

If G1(s)H(s) very large the effect of the disturbance can be minimized

$$G1(s)H(s) = \frac{Ka \cdot Km}{Ra}\left(Kt + \frac{Kb}{Ka}\right) \text{ approximately } \frac{Ka \cdot Km \cdot Kt}{Ra} \text{ since } Ka >> Kb$$

Strive to maintain Ka large and Ra < 2 ohms

تاثیر فیدبک-کاهش اثر اغتشاش

مثال:

Example 4:

$J = 5$

$b = 1.2$

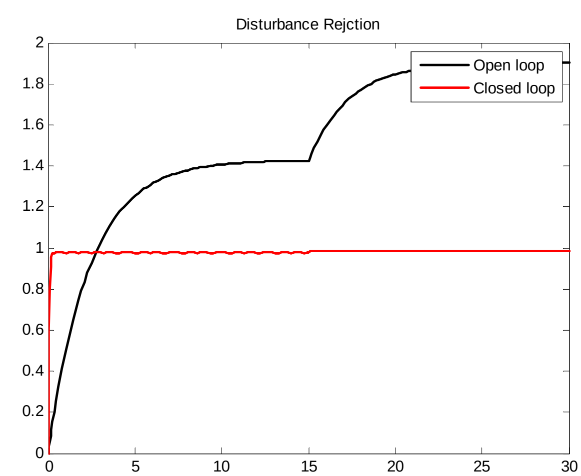
$km = 3$

$Ra = 1$

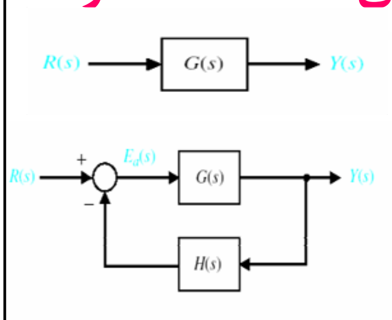
$kb = 0.3$

$kt = 1$

$ka = 30$



تاثیر فیدبک-کاهش خطای حالت ماندگار



$$E_o(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G(s))\cdot R(s)$$

$$E_c(s) = \frac{1}{1 + G(s)}\cdot R(s) \qquad H(s) = 1$$

Steady State Error

$$\lim_{t \to 0} e(t) = \lim_{s \to 0} s\cdot E(s)$$

For a step unit input

$$e_o(\text{infinite}) = \lim_{s \to 0} s\cdot(1 - G(s))\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} (1 - G(0))$$

$$e_c(\text{infinite}) = \lim_{s \to 0} s\cdot\left(\frac{1}{1 + G(s)}\right)\cdot\frac{1}{s} = \lim_{s \to 0} \left(\frac{1}{1 + G(0)}\right)$$

هزینه استفاده از فیدبک

- افزایش پیچیدگی سیستم
- هزینه استفاده از سنسورها
- از دست دادن بهره ورودی- خروجی
- امکان ناپایداری

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 4

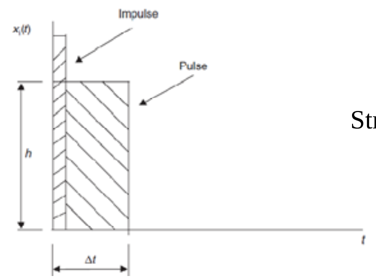
تحلیل های حوزه زمان برای سیستم های خطی

تحلیل پاسخ زمانی سیستم ها

- دست یافتن به پاسخ حالت گذرا و ماندگار مطلوب با استفاده از کنترل کننده های حلقه بسته از اهداف کنترل اتوماتیک است.
- رویکرد تحلیل سیستم ها بر اساس مشاهده پاسخ زمانی
  - ورودی های مهم در تحلیل پاسخ زمانی سیستم ها:
    - ورودی ضربه
    - ورودی پله
    - ورودی شیب
    - ورودی شتاب
- شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ های زمانی
- بررسی رفتار سیستم های مرتبه اول و دوم
- تقریب سیستم های مرتبه بالا با سیستم های مرتبه پایین

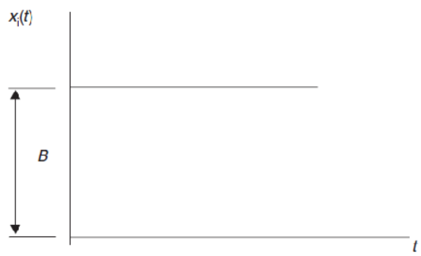
ورودی های مهم در تحلیل پاسخ زمانی

- ورودی ضربه:



Strenght of an impulse: $A = h.\Delta t$

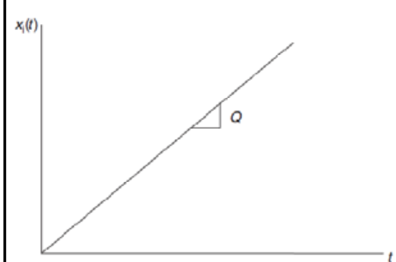
- ورودی پله:



$$r(t) = \begin{cases} B & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{B}{s}$$

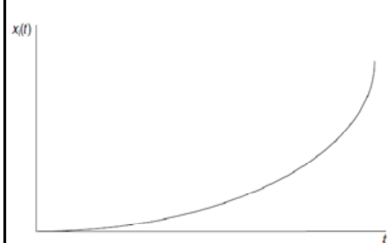
ورودی های مهم در تحلیل پاسخ زمانی

- ورودی شیب:



$$r(t) = \begin{cases} Qt & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{Q}{s^2}$$

- ورودی شتاب ($parabolic$):



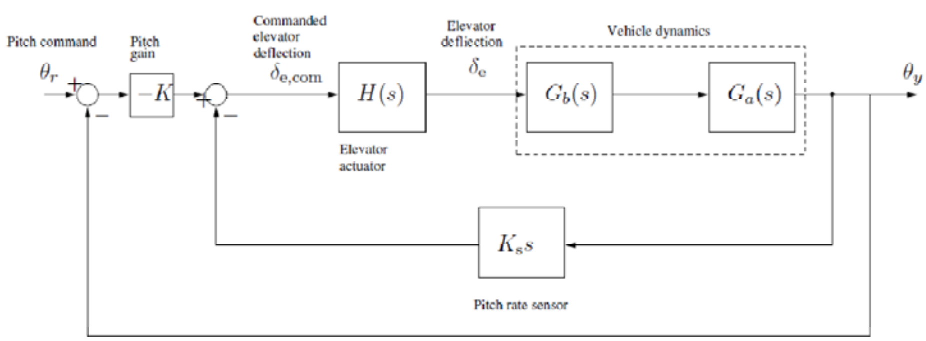
$$r(t) = \begin{cases} Kt^2 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{2k}{s^3}$$

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

Mfile		Simulink
Linear Systems	impulse	to workspace
	step	plot
	impulseplot	sim
	initial	
	Ltiview	
	lsim	
Nonlinear Systems	ode	

استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

مثال

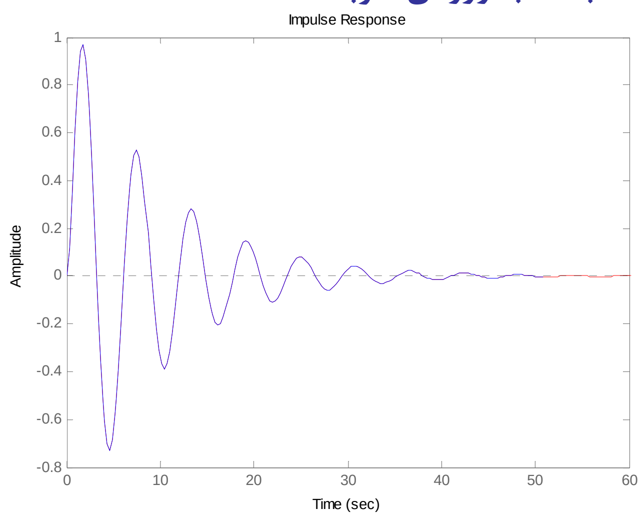


$$G(s) = G_a(s)G_b(s) = \frac{-0.125}{s^2 + 0.226s + 0.0169}\,\frac{s+0.435}{s+1.23}$$

$$H(s) = \frac{2}{s+2} \qquad K_s = 1 \qquad K = 15$$

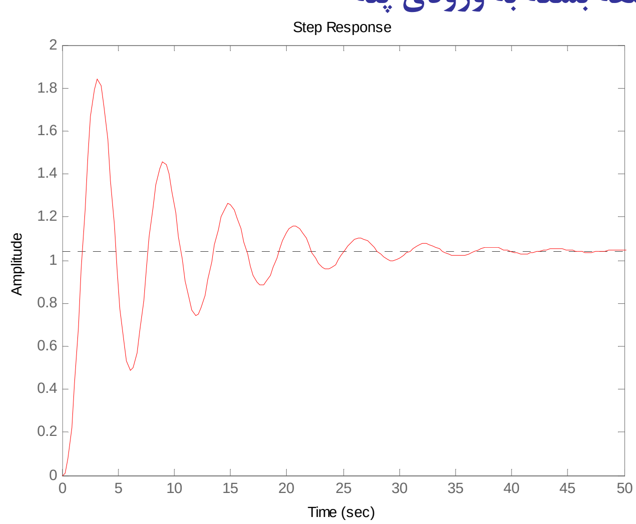
استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ حلقه بسته به ورودی ضربه



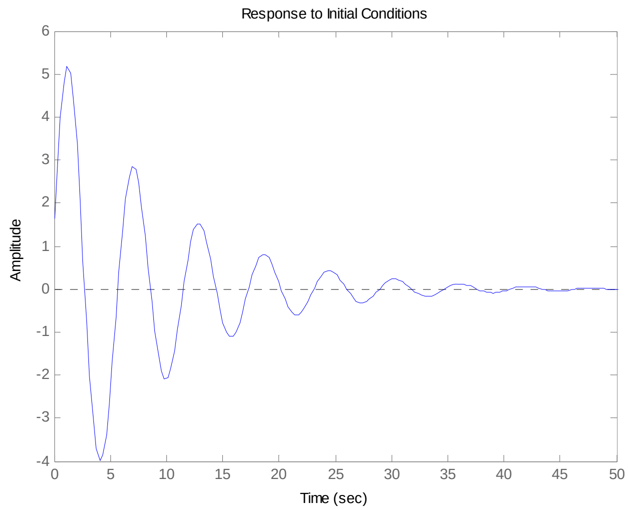
استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ حلقه بسته به ورودی پله



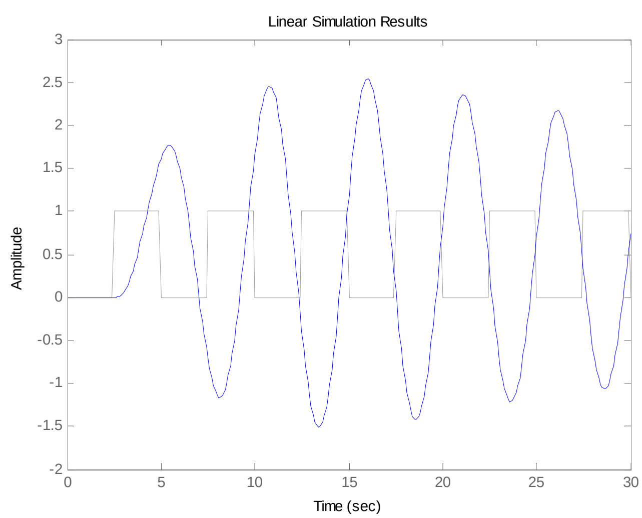
استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ به شرایط اولیه $x_0 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 1]$



استفاده از MATLAB در مشاهده پاسخ زمانی

پاسخ به ورودی موج مربعی:



پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

- Simulink
- Mfile
  - sim
  - ODE

مثال: جستجوگر ژیروسکوپ آزاد

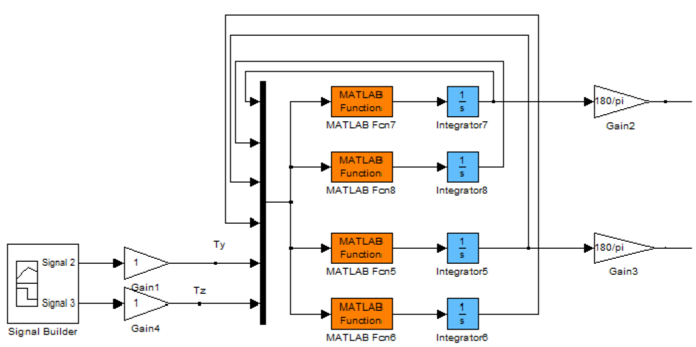
$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3}(T_z + I_R \omega_s x_4)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r}(T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3}(T_z + I_R \omega_s x_4)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r}(T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

ادامه مثال:

- Simulink
  - Sources block
  - Sinks



پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

ادامه مثال:

- **Mfile**
  - **ODE**

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3}(T_z + I_R \omega_s x_4)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r}(T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

```
function out = FGM(t,y)
ws=100*2*pi;
IR=30e-6;
Ir=15e-6;

out = [y(2);...
       (1+IR*ws*y(4))/(Ir*cos(y(3)));...
       y(4);...
       (1-IR*ws*y(2)*cos(y(3)))/(Ir)];
```

```
[t,y] = ode45('FGM',[0 0.02],[xic]);
figure(1)
plot(t,180*y(:,1)/pi,'-',t,180*y(:,3)/pi,'--')
```


پاسخ زمانی سیستم های غیر خطی

ادامه مثال:

- **Mfile**
  - **ODE**

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{I_r \cos x_3}(T_z + I_R \omega_s x_4)$$
$$\dot{x}_3 = x_4$$
$$\dot{x}_4 = \frac{1}{I_r}(T_y - I_R \omega_s x_2 \cos x_3)$$

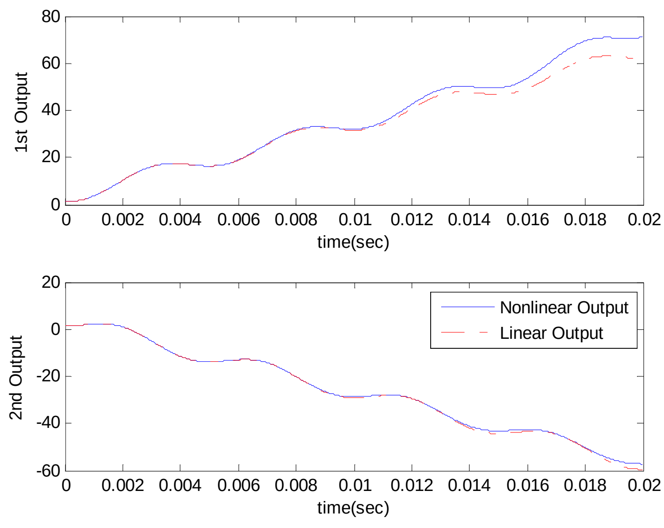
```
function out = FGM(t,y)
ws=100*2*pi;
IR=30e-6;
Ir=15e-6;

out = [y(2);...
       (1+IR*ws*y(4))/(Ir*cos(y(3)));...
       y(4);...
       (1-IR*ws*y(2)*cos(y(3)))/(Ir)];
```

```
[t,y] = ode45('FGM',[0 0.02],[xic]);
figure(1)
plot(t,180*y(:,1)/pi,'-',t,180*y(:,3)/pi,'--')
```

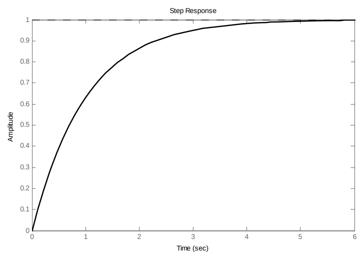
ODE Solvers

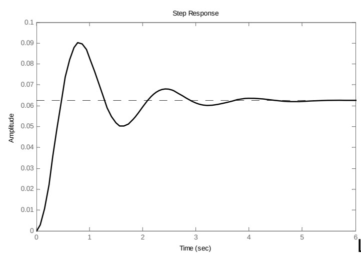
Solver	Problem Type	Order of Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. This should be the first solver you try.
ode23	Nonstiff	Low	For problems with crude error tolerances or for solving moderately stiff problems.
ode113	Nonstiff	Low to high	For problems with stringent error tolerances or for solving computationally intensive problems.
ode15s	Stiff	Low to medium	If ode45 is slow because the problem is stiff.
ode23s	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems and the mass matrix is constant.
ode23t	Moderately Stiff	Low	For moderately stiff problems if you need a solution without numerical damping.
ode23tb	Stiff	Low	If using crude error tolerances to solve stiff systems.

مقایسه پاسخ زمانی سیستم های خطی و غیرخطی



شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی



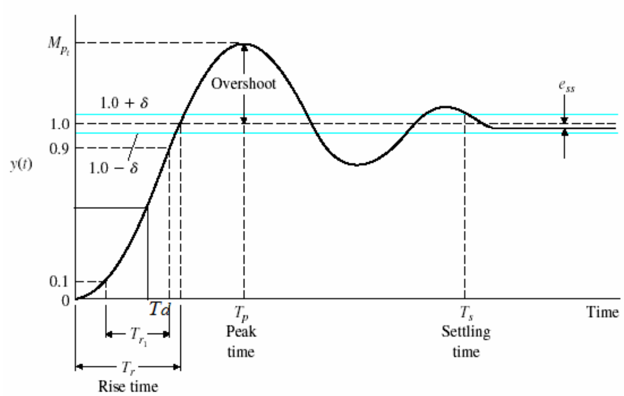


معیارهای عملکرد استاندارد بر اساس پاسخ پله سیستم تعریف می گردند، ولیکن بر اساس خواسته های طراح از سیستم تحت کنترل می توانند تعریف نیز گردند.

پاسخ پله سیستم های مرتبه اول به بالا:

پاسخ پله سیستم های مرتبه دوم به بالا:

شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی



Rise Time: T_r
Peak Time: T_p
Percentage Overshoot, P.O.: M_p
Settling Time: T_s
Delay time: T_d

شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی

•معیارهای عملکرد در حالت گذرا:

سرعت (چابکی) پاسخ زمانی (**Swiftness**)
- زمان خیز
  - ❊ 0-100% برای حالت زیر میرا
  - ❊ 10-90% برای حالت فوق میرا
- زمان فراجهش ماکزیمم
- زمان تاخیر

نزدیک بودن مقدار پاسخ زمانی به ورودی مرجع (**Closeness**)
- زمان نشست
- فراجهش ماکزیمم

شاخص های عملکرد در تحلیل پاسخ زمانی

شاخص های تحلیل عملکرد

(1) Integral of the square of the error, ISE

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt$$

(2) Integral of the absolute magnitude of the error, IAE

$$ISE = \int_0^T |e(t)|\,dt$$

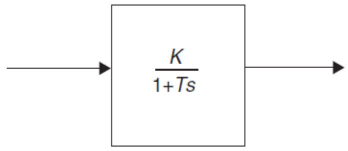
(3) Integral of time multiplied by absolute error, ITAE

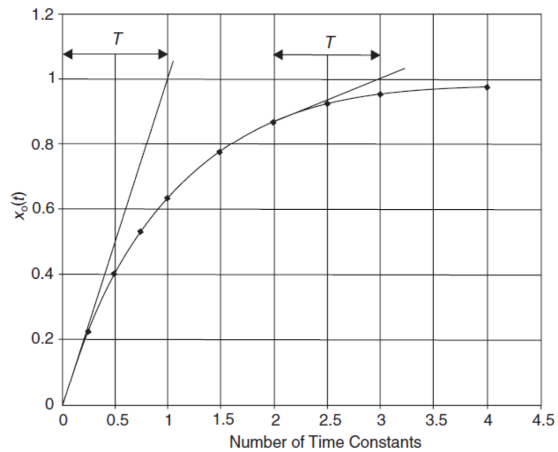
$$ISE = \int_0^T t\,|e(t)|\,dt$$

(4) Integral of time multiplied by the squared error, ITSE

$$ISE = \int_0^T te^2(t)dt$$

پاسخ پله سیستم های مرتبه اول و شاخص عملکرد متناظر





Swiftness :

T_r

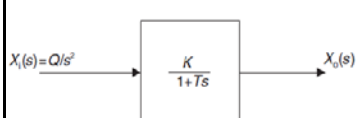
Closeness :

$T_{s-98\%} = 4T$

$T_{s-95\%} = 3T$

t/T	0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	2.5	3	4
$x_o(t)$	0	0.221	0.393	0.527	0.632	0.770	0.865	0.920	0.950	0.980

پاسخ ورودی شیب سیستم های مرتبه اول



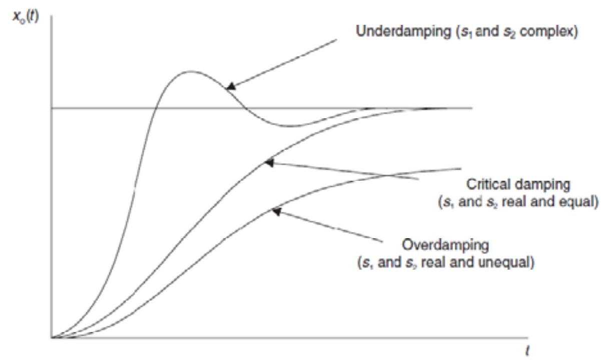
Unit ramp response of a first-order system

t/T	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_i(t)/T$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_o(t)/T$	0	0.368	1.135	2.05	3.018	4.007	5	6

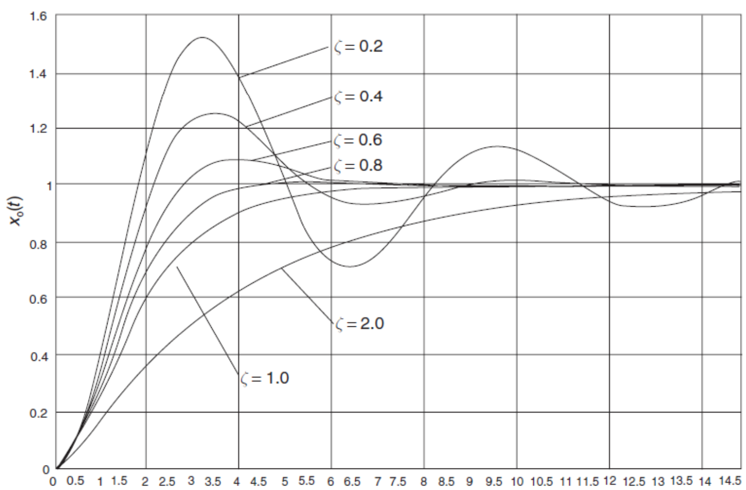
سیستم های مرتبه دوم

Standard form: $$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

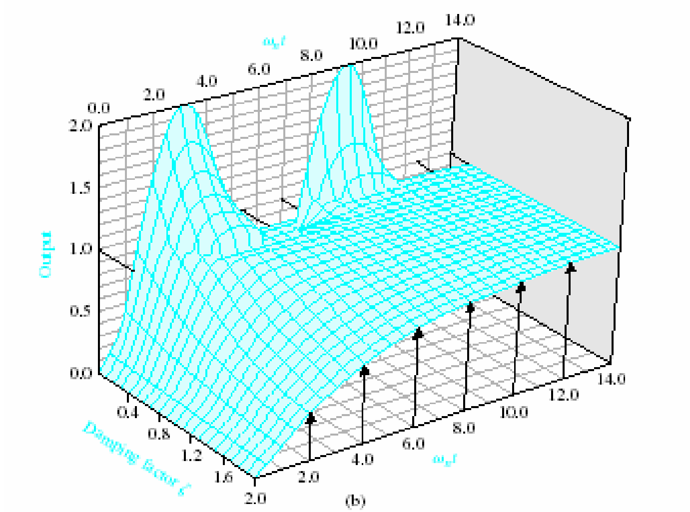
$\zeta=0$ No damping
$\zeta<1$ Underdamping
$\zeta=1$ Critical damping
$\zeta>1$ Overdamping



پاسخ پله سیستم های مرتبه دوم

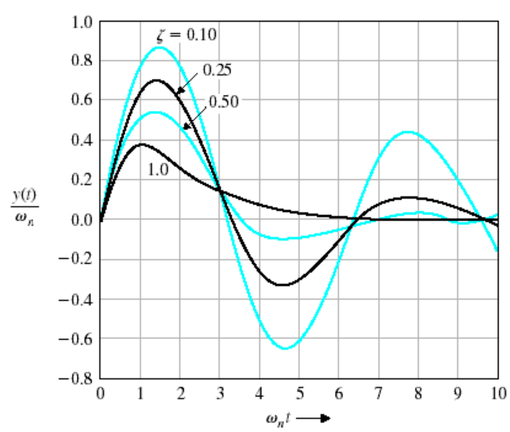


پاسخ پله سیستم های مرتبه دوم به ازای تغییرات نسبت میرایی



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

پاسخ ضربه سیستم های مرتبه دوم



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

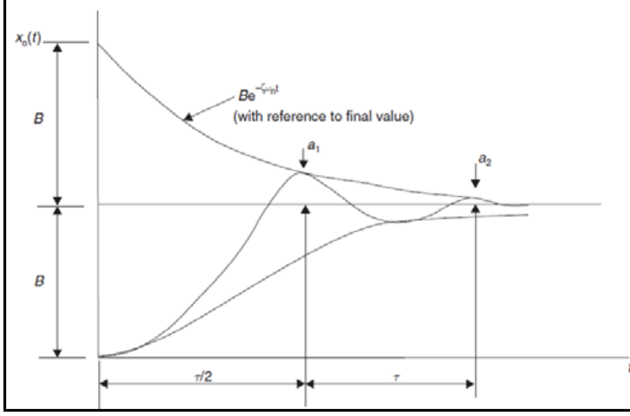
شاخص های عملکرد در سیستم های مرتبه دوم

$$x_o(t) = K\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left\{\cos\omega_d t + \left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\sin\omega_d t\right\}\right]$$

$$= K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \phi)\right]$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



$$MP\% = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

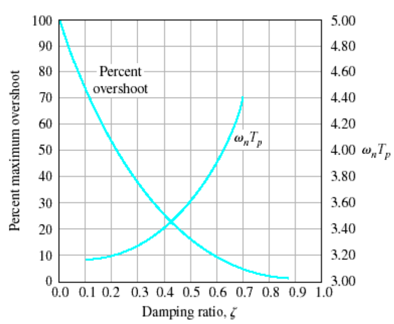
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_{s-98\%} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

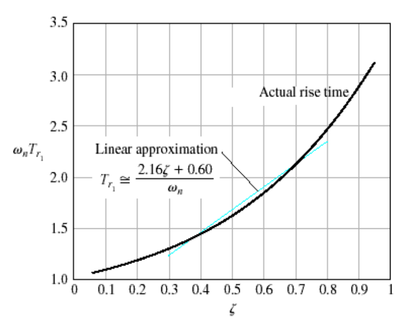
$$T_{s-95\%} = \frac{3}{\xi\omega_n}$$

شاخص های عملکرد در سیستم های مرتبه دوم

ارتباط درصدفراجهش و نسبت میرایی



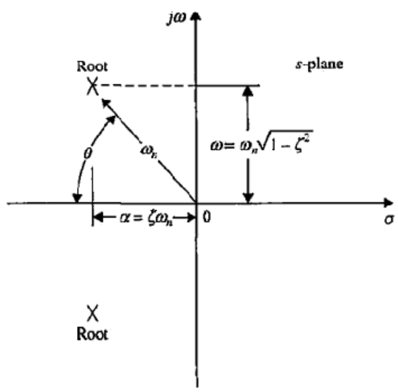
ارتباط زمان خیز و نسبت میرایی

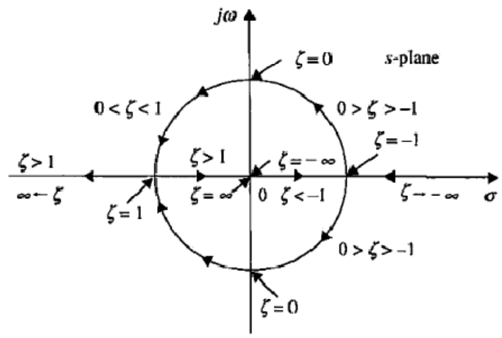


واضح است که در دست یافتن به پاسخ زمانی نیاز به تعدیل مناسب شاخص های عملکرد مطلوب است.

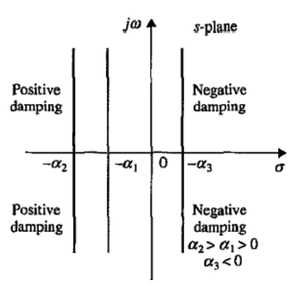
مکان هندسی قطب های یک سیستم مرتبه دو بر اساس تغییرات نسبت میرایی

Standard form: $G(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \rightarrow \quad s_{1,2}=-\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$





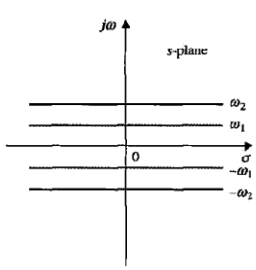
مکان هندسی قطب های یک سیستم مرتبه دوم



مکان قطب های با ضریب میرایی ثابت:

example_3.m

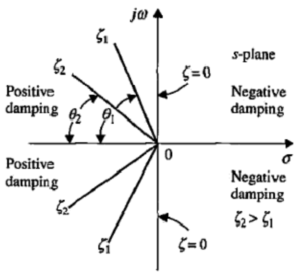
مکان قطب های با فرکانس میرایی ثابت:



example_4.m

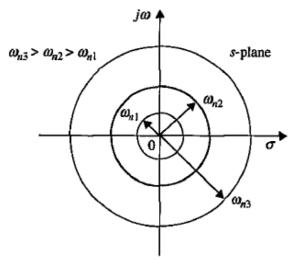
مکان هندسی قطب های یک سیستم مرتبه دوم

مکان قطب های با نسبت میرایی ثابت:

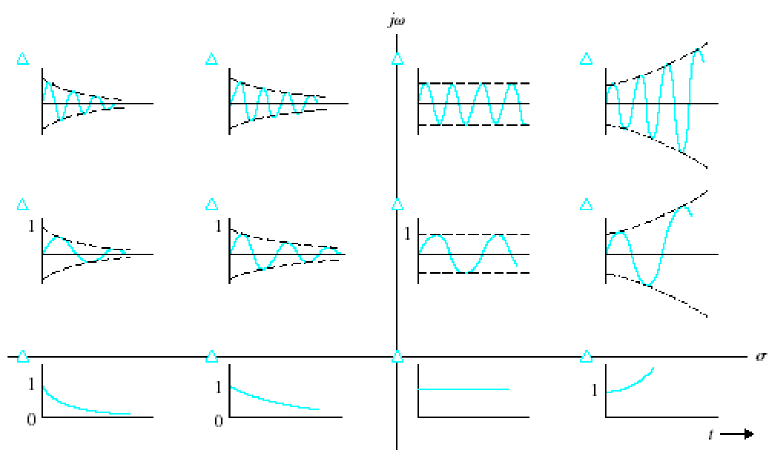


example_5.m

مکان قطب های با فرکانس طبیعی ثابت:

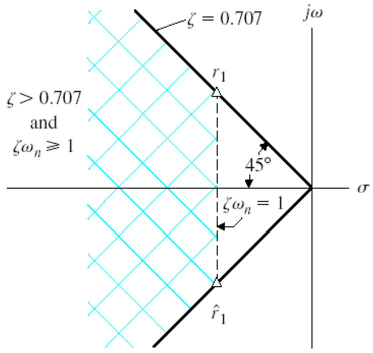


جمع بندی اولیه: پاسخ زمانی سیستم ها بر اساس محل قرار گرفتن قطب ها



جمع بندی اولیه: پاسخ زمانی سیستم ها بر اساس محل قرار گرفتن قطب ها

مثال: (پایه های بحث طراحی)



$$T_s = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} \le 4\text{sec}$$

$$\zeta \cdot \omega_n \ge 1$$

When the closed-loop roots are chosen as:

$$r_1 = -1 + j \cdot 1$$
$$r_2 = -1 - j \cdot 1$$

We have $T_s = 4\text{sec}$ and an overshoot of 4.3%.

Therefore, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ and $\omega_n = \frac{1}{\zeta} = \sqrt{2}$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{K}{s^2 + p \cdot s + K} = \frac{\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^{\ 2}}$$

$K = \omega_n^{\ 2} = 2$ $\quad\quad$ $P = 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n = 2$

تاثیر صفر بر پاسخ سیستم مرتبه دوم

$$G_z(s) = \frac{\omega_n^2 (T_z s + 1)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$G_z(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{\omega_n^2 T_z s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

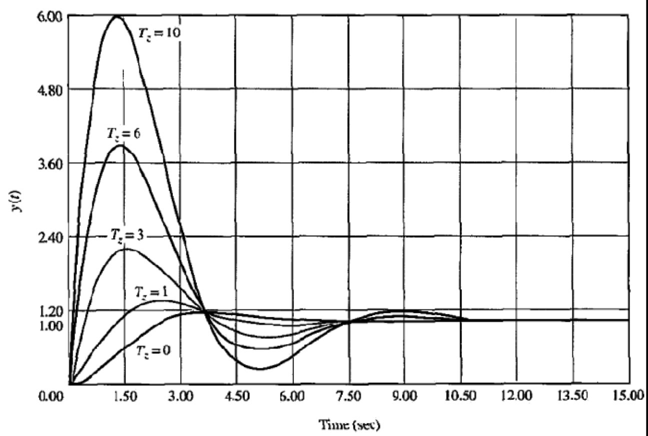


Figure 5-37 Unit-step responses of the system with the closed-loop transfer function in Eq. (5-162): $T_z = 0, 1, 2, 3, 6,$ and 10.

تاثیر صفر بر پاسخ سیستم مرتبه دوم

$$G_z(s)=\frac{\omega_n^2(T_z s+1)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$G_z(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}+\frac{\omega_n^2 T_z s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

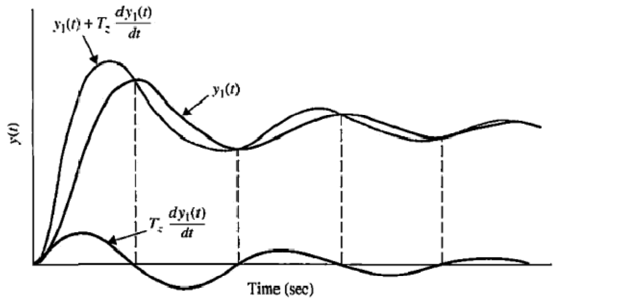
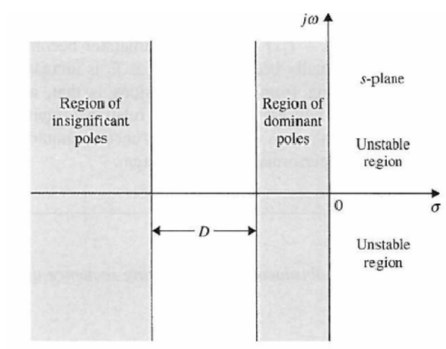


Figure 5-38 Unit-step responses showing the effect of adding a zero to the closed-loop transfer function.

$$y(t)=y_1(t)+\frac{d}{dt}y_1(t)$$

تحلیل سیستم های مرتبه بالا بر اساس تئوری قطب های غالب



$$\max\left(\mathrm{Re}\{insign.\ poles\}\right)<5\times\max\left(\mathrm{Re}\{\mathrm{Dominant}\ poles\}\right)$$

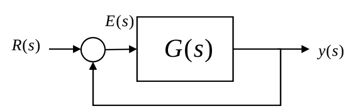
تحلیل سیستم های مرتبه بالا بر اساس تئوری قطب های غالب

مثال:

$$G(s)=\frac{20}{(s+10)(s^2+2s+2)}=\frac{20}{10(\frac{s}{10}+1)(s^2+2s+2)}\approx\frac{2}{(s^2+2s+2)}$$

خطای حالت ماندگار

$$G(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$



example_7.mdl

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to0}sE(s)=\lim_{s\to0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to0}\frac{s\frac{R}{s}}{1+G(s)}$$

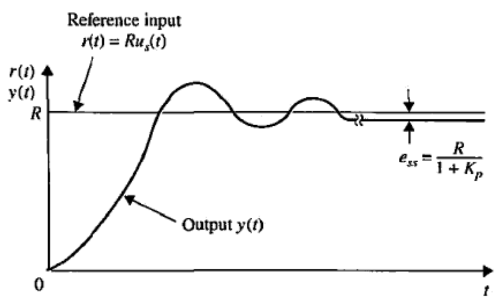


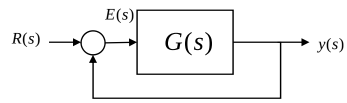
Figure 5-5 Typical steady-state error due to a step input.

Type	e_{ss}
$N=0$	$e_{ss}=\frac{R}{1+k_p}$
$N\geq1$	$e_{ss}=0$

$k_p=G(0)$

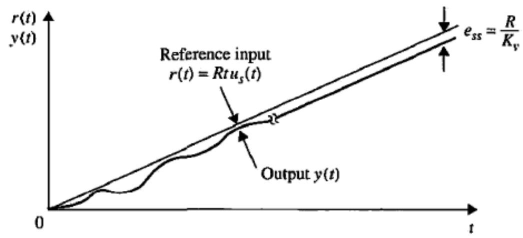
خطای حالت ماندگار

$$G(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$



example_7.mdl

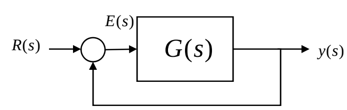
$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{R}{s^2}}{1+G(s)}$$



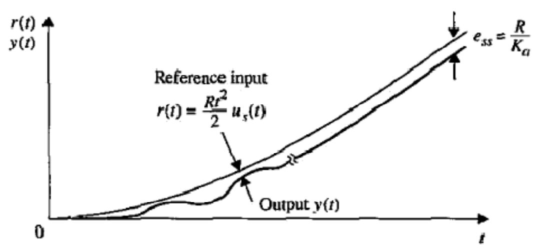
Type	e_{ss}
$N=0$	$e_{ss}=\infty$
$N=1$	$e_{ss}=\frac{R}{k_v}$
$N\geq 2$	$e_{ss}=0$

خطای حالت ماندگار

$$G(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)}$$



$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s\frac{R}{s^3}}{1+G(s)}$$



Type	e_{ss}
$N=0,1$	$e_{ss}=\infty$
$N=2$	$e_{ss}=\frac{R}{k_a}$
$N\geq 3$	$e_{ss}=0$

خطای حالت ماندگار- جمع بندی

Type of System	Error Constants			Steady-State Error e_{ss}		
				Step Input	Ramp Input	Parabolic
j	K_p	K_v	K_a	$\frac{R}{1+K_p}$	$\frac{R}{K_v}$	$\frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

تعریف صفر و قطب

صفرهای سیستم: عبارتند از فرکانس هایی که در آن انتقال از ورودی به خروجی متوقف می گردد.

قطب های سیستم: عبارتند از فرکانس هایی که در آن تابع انتقال سیستم منفرد می شود.

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 5

تحلیل پایداری به روش
Routh-Hurwitz

تحلیل پایداری سیستم های خطی

- اولین گام در کنترل یک سیستم دست یابی به پایداری سیستم تحت است. به عبارت دیگر تضمین پایداری اصلی ترین بخش طراحی یک کنترل کننده محسوب می گردد.

- تعریف پایداری BIBO:

یک سیستم پایدار BIBO است اگر به ازای هر ورودی محدود خروجی محدود باقی بماند.

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\varsigma_k\omega_k s+\omega_k^2)}$$

$$\text{chractrisitic polynimial: } \Delta(s)=\prod_{j=1}^{q}(s+p_j)\prod_{k=1}^{r}(s^2+2\varsigma_k\omega_k s+\omega_k^2)$$

تحلیل پایداری سیستم های خطی

پاسخ پله سیستم:

$$C(s) = \frac{a}{s} + \sum_{j=1}^{q} \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^{r} \frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k) + c_k\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2+2\zeta_k\omega_k s+\omega_k^2} \qquad (q+2r=n)$$

$$c(t) = a + \sum_{j=1}^{q} a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^{r} b_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\cos\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t$$

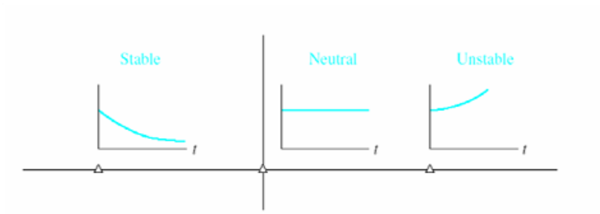
$$+ \sum_{k=1}^{r} c_k e^{-\zeta_k\omega_k t}\sin\omega_k\sqrt{1-\zeta_k^2}\,t, \qquad \text{for } t \geq 0$$

در نتیجه شرط پایداری BIBO عبارت است از:

بخش حقیقی تمامی قطب ها سمت چپ محور موهومی قرار داشته باشند.

$$\begin{cases} -P_j < 0 \\ -\varsigma_k\omega_k < 0 \end{cases}$$

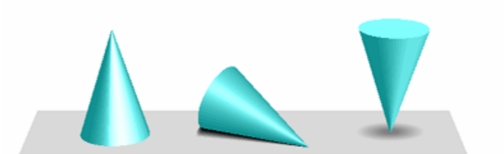
تحلیل پایداری سیستم های خطی



ناپایداری: حداقل یک قطب سمت راست محور موهومی قرار داشته باشد.

مرز پایداری (نا پایداری): حداقل یک قطب روی محور موهومی قرار داشته باشد.

- **معرفی مساله پایداری و ناپایداری نقطه تعادل در یک سیستم:**



(a) Stable (b) Neutral (c) Unstable

روش Routh-Hurwitz در تحلیل پایداری:

- **شرط لازم پایداری در روش Routh-Hurwitz:**
  - تمامی ضرایب معادله مشخصه هم علامت و مخالف صفر باشند.
- **شرط لازم و کافی پایداری در روش Routh-Hurwitz:**

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ s^0 & h_{n-1} & & \end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{(a_{n-1})(a_{n-2}) - a_n(a_{n-3})}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = \frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = \frac{-1}{b_{n-1}}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$

روش Routh-Hurwitz در تحلیل پایداری:

- **شرط لازم و کافی پایداری در روش Routh-Hurwitz:**
  - تمامی ضرایب در ستون اول آرایه Routh دارای علامت یکسان باشند.
- **توجه:**
  - معادله مشخصه به تعداد تغییر علامت ها در ستون اول آرایه Routh ریشه ناپایدار دارد.
- **مثال:**

$$\Delta(s) = (s-1)(s+2)(s+3) = s^3 + 4s^2 + s - 6$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 4 & -6 \\ s^1 & 2.5 & \\ s^0 & -6 & \end{array}$$

روش Routh-Hurwitz در تحلیل پایداری:

- مثال: (سیستم های مرتبه دوم)

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & \\ s^0 & a_0 & \end{array} \quad \Rightarrow a_2, a_1, a_0 : \text{have same sign}$$

حالت های خاص درروش Routh-Hurwitz :

۱- اولین عنصر از یک سطر از آرایه Routh صفر باشد ولیکن سطر کامل صفر نباشند.

در این حالت داریه صفر را با $\varepsilon > 0$ جایگزین نموده و آرایه روث را به صورت حدی تکمیل نمایید.

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

مثال:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 2 & 11 \\ s^4 & 2 & 4 & 10 \\ s^3 & \cancel{0}\,\varepsilon > 0 & 6 & \\ s^2 & \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} < 0 & 10 & \\ s^1 & \approx 6 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

$\Rightarrow$ two unstable poles: 0.8950 + 1.4561i
0.8950 - 1.4561i
-1.2407 + 1.0375i
-1.2407 - 1.0375i
-1.3087

حالت های خاص درروش Routh-Hurwitz :

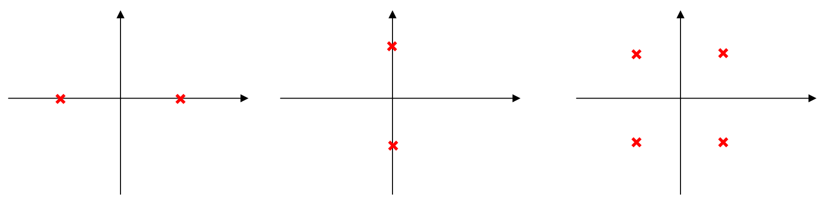
۲- یک سطر کامل از آرایه Routh صفر باشد.

این حالت ریشه های معادله مشخصه سیستم یک یا چند حالت زیر را برآورده می نمایند: $\varepsilon > 0$

۲-۱- معادله دست کم یک جفت ریشه حقیقی مختلف العلامه دارد.

۲-۲- معادله یک یا چند جفت ریشه موهومی دارد.

۲-۳- معادله چند جفت ریشه مزدوج مختلط دارد که نسبت به مبدا قرینه اند.



حالت های خاص درروش Routh-Hurwitz :

۲- یک سطر کامل از آرایه Routh صفر باشد.

در این حالت به منظور تکمیل آرایه Routh از سطر ماقبل صفر مشتق گرفته و ضرایب را جایگزین صفرها می نماییم.

توجه: معادله حاصل از ضرایب سطر ماقبل صفر را معادله کمکی می نامند که ریشه های آن ریشه های معادله مشخصه است.

ریشه های معادله کمکی یکی از سه حالت گفته شده را برآورده می نماید.

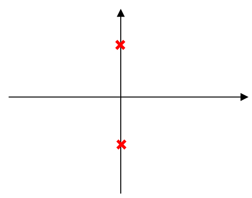
حالت های خاص درروش Routh-Hurwitz :

مثال:

$$\Delta(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4 = 0$$

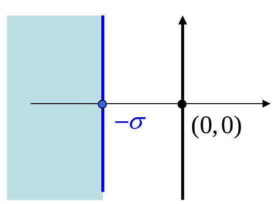
$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 8 & 7 \\
s^4 & 4 & 8 & 4 \\
s^3 & 6 & 6 & \\
s^2 & 4 & 4 & \\
s^1 & \cancel{0}8 & & \\
s^0 & 4 & &
\end{array}
\qquad \rightarrow A(s) = 4s^2 + 4 = 0 \xrightarrow{dA/ds} 8s$$

دو قطب در مرز ناپایداری:



تحلیل پایداری نسبی در روش Routh-Hurwitz :

با استفاده از انتقال محور موهومی می توان از روش Routh-Hurwitz برای بررسی پایداری نسبی استفاده نمود. این امر با استفاده از تغییر متغیر زیر امکان پذیر خواهد بود.



$$\boxed{S_{old} = S_{new} - \sigma}$$

مثال: مطلوب است تعداد ریشه های معادله مشخصه زیر در سمت راست خط $s = -1$:

$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6$$

تحلیل پایداری نسبی در روش Routh-Hurwitz :

ادامه مثال:

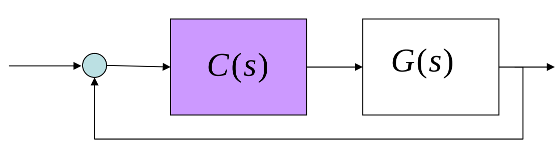
$$\Delta(s) = s^3 + 5s^2 + 8s + 6$$

$$s = z - 1 \quad \rightarrow \quad \Delta(z) = (z-1)^3 + 5(z-1)^2 + 8(z-1) + 6$$
$$= z^3 + 2z^2 + z + 2$$

$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 1 \\ z^2 & 2 & 2 \\ z^1 & \cancel{0}\,4 & \\ z^0 & 2 & \end{array} \rightarrow A(z) = 2z^2 + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{dA/dz} 4z \\ z = \pm j \rightarrow s = -1 \pm j \end{cases}$$

استفاده از روش Routh-Hurwitz در طراحی:

مثال: سیستم حلقه بسته زیر را در نظر بگیرید. بهره k و a را بگونه ای تعیین نمایید که سیستم تحت کنترل پایدار باشد.



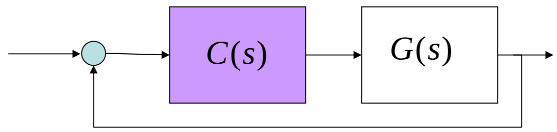
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+5)}$$

$$C(s) = \frac{k(s+a)}{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta_{cl}(s) = 1 + G(s)C(s) = s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (k+10)s + k.a = 0$$

استفاده از روش Routh-Hurwitz در طراحی:

ادامه مثال:

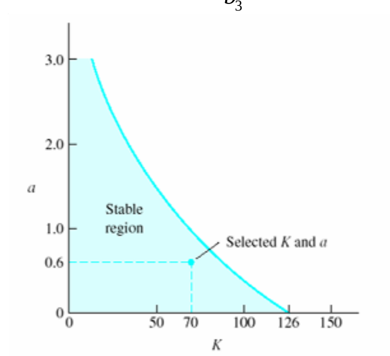


s^4	1	17	Ka
s^3	8	$(K+10)$	0
s^2	b_3	Ka	
s^1	c_3		
s^0	Ka		

$$b_3 = \frac{126-k}{8}$$

$$c_3 = \frac{b_3(k+10)-8ka}{b_3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ k>0 \\ k<126 \\ (k-126)(k+10)-64ka>0 \end{cases}$$



نکاتی در مورد روش Routh-Hurwitz:

توجه: در تکمیل آرایه **Routh** می توان سطری را در یک ضریب ثابت ضرب و یا بر آن تقسیم نمود بدون آنکه تغییری در علامت ستون اول رخ دهد.

$$Q(s) = s^6 + 3s^5 + 2s^4 + 9s^3 + 5s^2 + 12s + 20$$

s^6	1	2	5	20	
s^5	$\cancel{3}$	$\cancel{9}$	$\cancel{12}$		
	1	3	4		(after dividing by 3)
s^4	−1	1	20		
s^3	$\cancel{4}$	$\cancel{24}$			
	1	6			(after dividing by 4)
s^2	7	20			
s^1	22				(after multiplying by 7)
s^0	20				

نکاتی در مورد روش Routh-Hurwitz :

توجه: در هنگامی که در آرایه Routh ستون اول یکی از سطرها صفر می شود در حالیکه سایر ضرایب صفر نیستند به جای روش پیشین میتوان از دو روش زیر بهره برد:

۱- استفاده از تغییر متغیر $s=\frac{1}{x}$

۲- ضرب چندجمله ای در جمله $s+1$.

مثال:

$$Q(s) = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 5$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 2 & 5 \\ s^3 & 1 & 2 & \\ s^2 & 0 & 5 & \end{array}$$

نکاتی در موردروش Routh-Hurwitz :

ادامه مثال: روش ۱

$$Q(x) = 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 5 & 2 & 1 \\ x^3 & 2 & 1 & \\ x^2 & -1 & 2 & \\ x^1 & 5 & & \\ x^0 & 2 & & \end{array}$$

روش ۲:

$$Q_1(s) = Q(s)(s+1) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 7s + 5$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 7 \\ s^4 & 2 & 4 & 5 \\ s^3 & 2 & 9 & \\ s^2 & -10 & 10 & \\ s^1 & 11 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

نکاتی در موردروش Routh-Hurwitz:

توجه: استفاده از قضیه مقدار نهایی برای محاسبه خطای حالت ماندگار فقط به شرط پایداری سیستم صحیح و ممکن است.

$$Q(x) = 5x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$\begin{array}{c|ccc} x^4 & 5 & 2 & 1 \\ x^3 & 2 & 1 & \\ x^2 & -1 & 2 & \\ x^1 & 5 & & \\ x^0 & 2 & & \end{array}$$

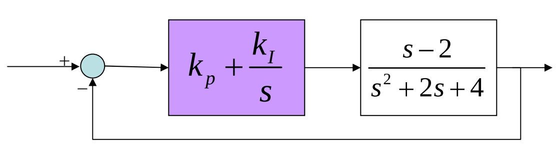
روش ۲:

$$Q_1(s) = Q(s)(s+1) = s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 7s + 5$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & 3 & 7 \\ s^4 & 2 & 4 & 5 \\ s^3 & 2 & 9 & \\ s^2 & -10 & 10 & \\ s^1 & 11 & & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

تمرین

ناحیه ای از صفحه k_I بر حسب k_p را مشخص نمایید که کنترل کننده PI بتواند سیستم زیر را در حالت حلقه بسته پایدار نماید.



باسمه تعالی

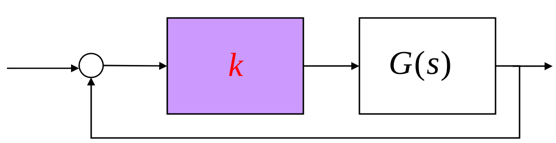
سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 6

تحلیل پایداری به روش مکان هندسی ریشه ها

مقدمه

در تحلیل پایداری به روش **Routh-Hurwitz** فقط به مساله سمت چپ/راست بودن قطب ها پرداخته شد. در حالیکه محل قطب ها در تعیین نوع پاسخ سیستم بسیار موثر است. لذا روش مکان هندسی ریشه ها در سال ۱۹۴۸ توسط **Evans** ارائه گردید.



$$G(s)=\frac{p(s)}{q(s)} \quad \rightarrow \Delta(s)=1+kG(s)=0 \;\Rightarrow\; kG(s)=-1$$

$$kG(s)=-1 \Rightarrow \; |kG(s)| \measuredangle kG(s)=-1+j0=1\measuredangle 180^{o}$$

مقدمه

$$|kG(s)|\measuredangle kG(s)=1\measuredangle 180^o \Rightarrow \begin{cases} |kG(s)|=1 \\ \measuredangle kG(s)=180^o \pm n360^o \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |G(s)|=\dfrac{1}{|k|} & \text{شرط دامنه:} \\ \measuredangle G(s)=\begin{matrix}(2n+1)\pi=\pm 180^o & k>0 \\ (2n)\pi=\pm 180^o & k<0\end{matrix} & \text{شرط زاویه:} \end{cases}$$

شرط دامنه:

$$G(s)=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_j)} \Rightarrow |G(s)|=\frac{\prod_{i=1}^{m}|s+z_i|}{\prod_{j=1}^{n}|s+p_j|}=\frac{1}{|k|}$$

در هر نقطه از مکان هندسی ریشه ها حاصلضرب فاصله تا قطب ها تقسیم بر فاصله تا صفر ها برابر $|k|$است.

مقدمه

شرط زاویه:

*** برای $k>0$ در هر نقطه از مکان هندسی ریشه ها تفاضل زاویه با صفرها از زاویه با قطب ها برابر مضرب فرد از ۱۸۰ درجه است.**

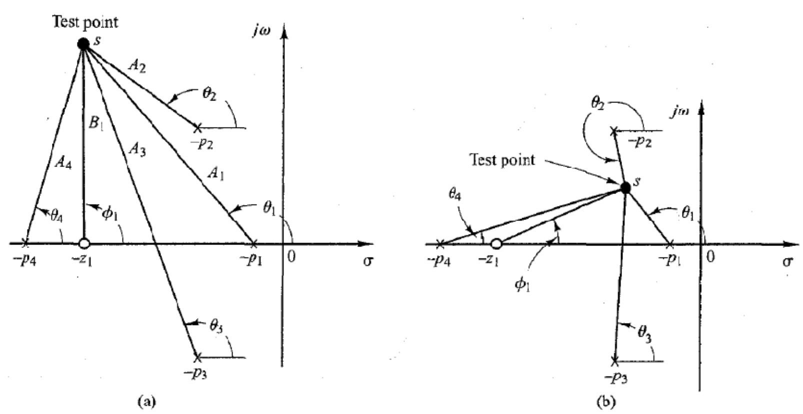
$$k>0:\ \measuredangle G(s)=(2n+1)\pi \ \Rightarrow \sum_i \measuredangle(s+z_i)-\sum_j \measuredangle(s+p_j)=(2n+1)\pi$$

*** برای $k<0$ در هر نقطه از مکان هندسی ریشه ها تفاضل زاویه با صفرها از زاویه با قطب ها برابر مضرب زوج از ۱۸۰ درجه است.**

$$k<0:\ \measuredangle G(s)=(2n+1)\pi \ \Rightarrow \sum_i \measuredangle(s+z_i)-\sum_j \measuredangle(s+p_j)=(2n)\pi$$

مقدمه

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+z_1)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)(s+p_4)}$$



$$|k| = \frac{A_1A_2A_3A_4}{B_1}$$

$$\phi_1 - (\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4) = \begin{cases}(2n+1)\pi & k>0 \\ 2n\pi & k<0\end{cases}$$

خواص مکان هندسی ریشه ها

۱- قطب های حلقه بسته به ازای $k=0$ همان قطب های حلقه باز هستند. (شروع مکان هندسی ریشه های حلقه بسته)

$$G(s)H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \Rightarrow \Delta(s) = q(s)+kp(s) = 0 \Rightarrow \Delta(s) = q(s) = 0$$

۲- قطب های حلقه بسته به ازای $k=\infty$ همان صفر های حلقه باز هستند. (پایان مکان هندسی ریشه های حلقه بسته)

$$G(s)H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} \Rightarrow \Delta(s) = q(s)+kp(s) = 0 \Rightarrow \Delta(s) = p(s) = 0$$

خواص مکان هندسی ریشه ها

۳- برای $k>0$ بخش های از محور حقیقی که سمت راست آن تعداد فردی صفر و قطب حقیقی وجود داشته باشد جزء مکان هندسی ریشه ها است.

* برای $k<0$ بخش های از محور حقیقی که سمت راست آن تعداد زوجی صفر و قطب حقیقی وجود داشته باشد جزء مکان هندسی ریشه ها است.

۴- نقاط شکست یا خروج از مکان هندسی ریشه ها لازم است در معادله زیر صدق نمایند.

$$\frac{d}{ds}G(s)=0$$

خواص مکان هندسی ریشه ها

۵- محل تقاطع مجانب ها

$$\sigma=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}$$

۶- زاویه مجانب ها

$$k>0 \quad \rightarrow \quad \theta=\frac{(2n+1)\pi}{n-m}$$

$$k<0 \quad \rightarrow \quad \theta=\frac{2n\pi}{n-m}$$

خواص مکان هندسی ریشه ها

۷- مکان هندسی ریشه ها نسبت به محور حقیقی متقارن است.

۸- محل تقاطع مکان هندسی ریشه ها با محور موهومی با استفاده از روش Routh-Hurwitz امکان پذیر است. در این روش لازم است مقداری از بهره که موجب صفر شدن یک سطر با شماره فرد می گردد برابر صفر باشد.

۹- زاویه خروج از قطب و ورود به صفر را می توان از شرط زاویه بدست آورد.

$$k>0: \quad \sum_i \measuredangle(s+z_i)-\sum_j \measuredangle(s+p_j)=(2n+1)\pi$$

$$k<0: \quad \sum_i \measuredangle(s+z_i)-\sum_j \measuredangle(s+p_j)=(2n)\pi$$

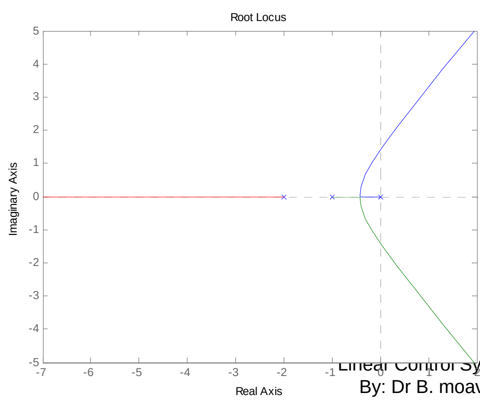
رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB

دستورات مرتبط با مکان هندسی ریشه ها

rlocus
sisotool

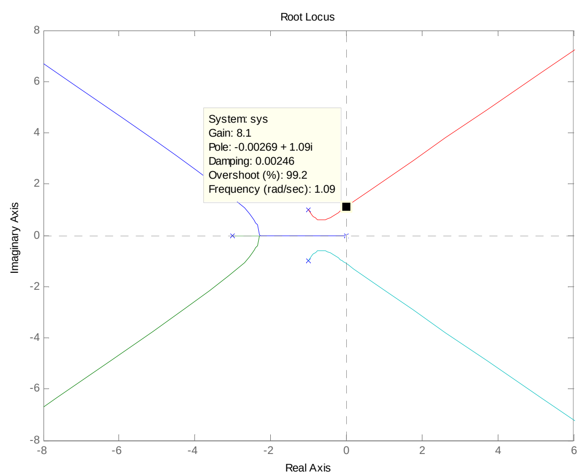
مثال ۱:

$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$



رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB

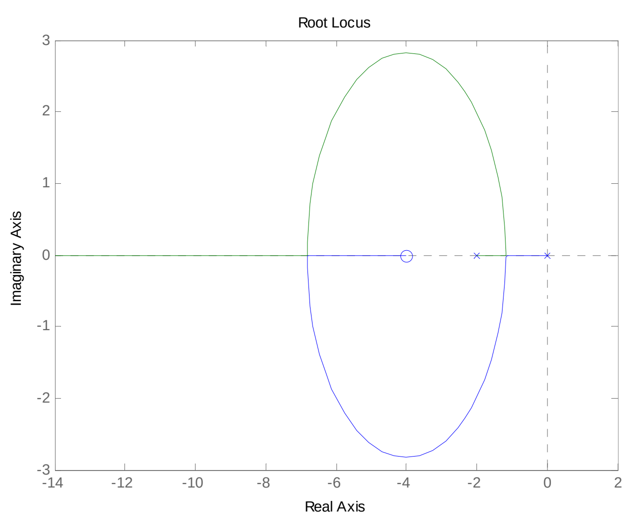
مثال۲: $G(s)=\dfrac{k}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$



11

رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB

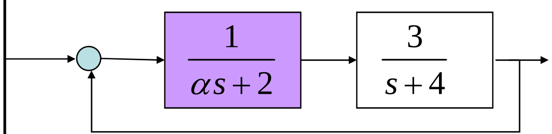
مثال۳: $\Delta(s)=s^2+(k+2)s+4k=0 \rightarrow 1+k\dfrac{s+4}{s^2+2s}=0$



12

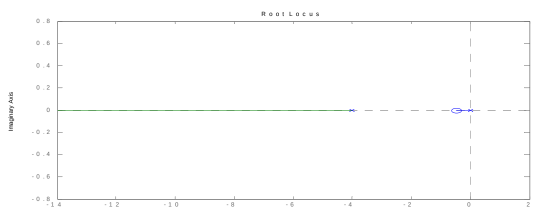
رسم مکان هندسی ریشه ها با استفاده از MATLAB

مثال ۴: مکان هندسی نسبت به تغییرات پارامتری از سیستم



$$\Delta(s) = (s+4)(\alpha s+2)+1 = \alpha s^2 + (2+4\alpha)s+1 = \alpha(s^2+4s)+2s+1 = 0$$

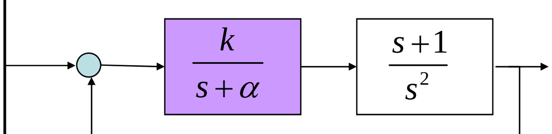
$$\alpha = \frac{1}{\beta} \rightarrow \Delta(s) = (s^2+4s)+\beta(2s+1) = 0 \Rightarrow 1+\beta\frac{2s+1}{s^2+4s} = 0$$



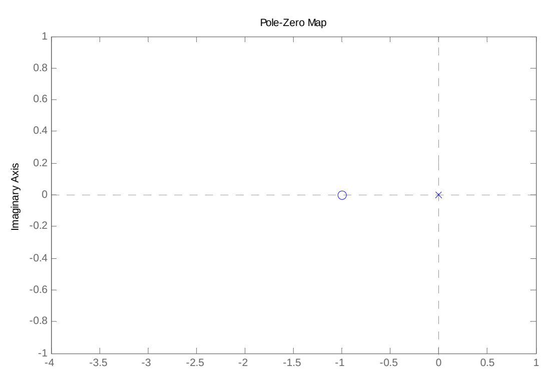
13

رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

مثال ۵: مکان هندسی نسبت به <u>تغییرات دو متغیر</u>



$$kGH(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+\alpha)}$$



رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

ادامه مثال ۵:

$$GH(s)=\frac{(s+1)}{s^2(s+\alpha)}$$

$$\text{break point:}\quad s\left(2s^2+(\alpha+3)s+2\alpha\right)=0$$

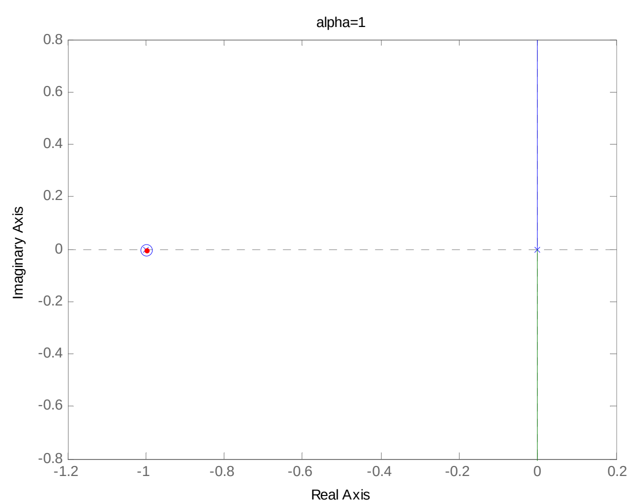
$$2s^2+(\alpha+3)s+2\alpha=0\rightarrow s_{1,2}=\frac{-(\alpha+3)\pm\sqrt{\alpha^2-10\alpha+9}}{4}$$

$$\alpha^2-10\alpha+9=0\rightarrow \begin{matrix}\alpha=9\\ \alpha=1\end{matrix}$$

رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

$\alpha=1$

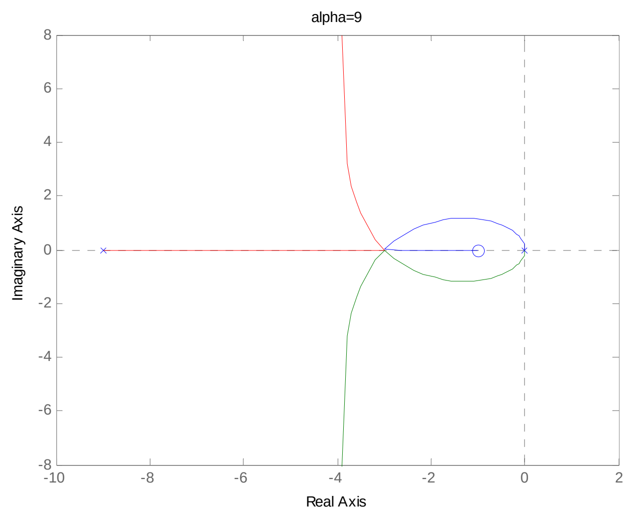
ادامه مثال ۵:



رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

$\alpha = 9$

ادامه مثال ۵:

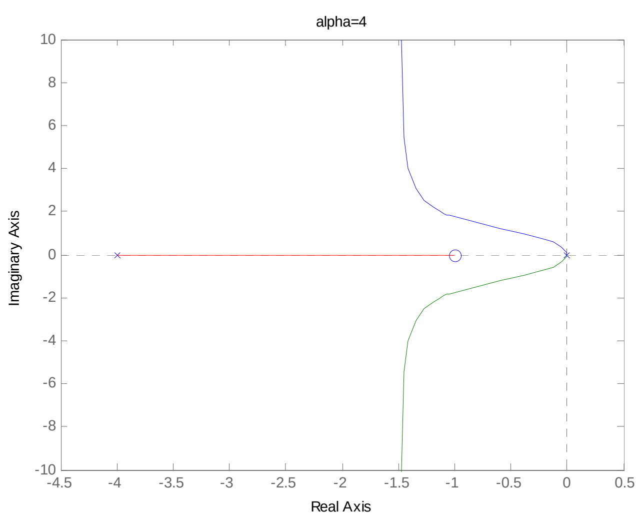


17

رسم مکان هندسی ریشه ها نسبت به دو متغیر

$\alpha = 4$

ادامه مثال ۵:



18

مکان هندسی ریشه ها و سیستم های غیر می نیمم فاز

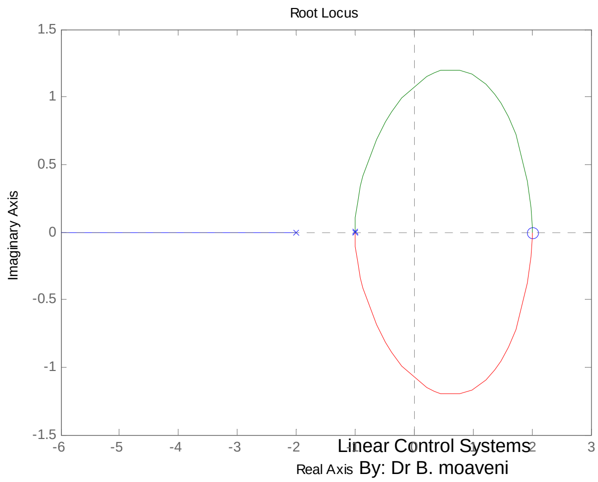
سیستم های دارای صفر ناپایدار:

$$G(s)=\frac{s-\alpha}{\prod_j (s+p_j)}$$

با توجه به اینکه قطب های حلقه بسته به سمت صفرهای حلقه باز حرکت می نمایند، لذا امکان ناپایداری حلقه بسته به ازای بهره بالا، قطعا وجود دارد.

مثال ۶:

$$G(s)=\frac{(s-2)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$



سیستم های تاخیردار

$$G_d(s)=G(s)e^{-T_d s}$$

تقریب پاده برای تاخیر زمانی:

$$e^{-T_d s}=\frac{e^{-\frac{T_d}{2}s}}{e^{\frac{T_d}{2}s}}=\frac{1-\frac{T_d}{2}s}{1+\frac{T_d}{2}s}$$

$$e^{-T_d s}=\frac{e^{-\frac{T_d}{2}s}}{e^{\frac{T_d}{2}s}}=\frac{1-\frac{T_d}{2}s+\frac{T_d^{\,2}}{8}s^2}{1+\frac{T_d}{2}s+\frac{T_d^{\,2}}{8}s^2}$$

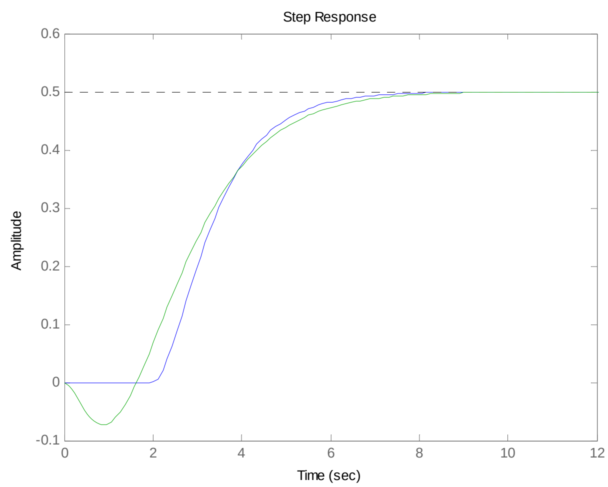
دستور MATLAB:

```
pade
```

رسم مکان هندسی ریشه های سیستم های تاخیردار

مثال ۷:

$$G(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2+3s+2}$$

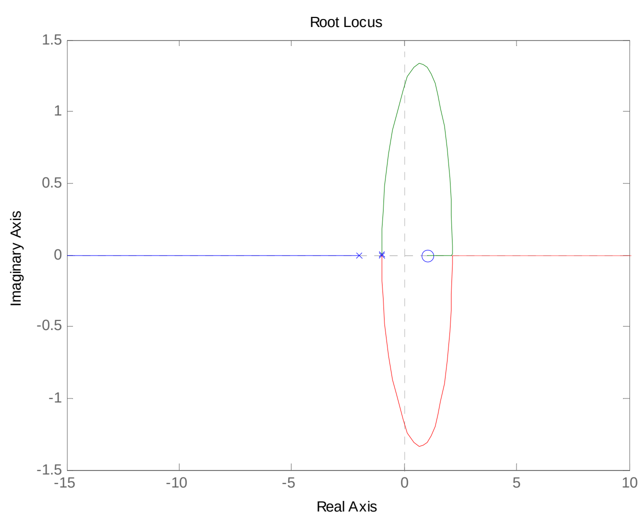


21

رسم مکان هندسی ریشه های سیستم های تاخیردار

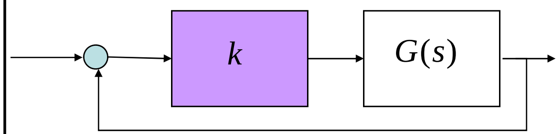
ادامه مثال ۷:

$$G(s)=\frac{e^{-2s}}{s^2+3s+2}$$



طراحی بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مثال ۸: طراحی بهره ثابت



Desire Performance :

$$\begin{cases} T_s \le 4 \text{ (sec)} \\ \%MP \le \%5 \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{1}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \le 4 \Rightarrow -\xi\omega_n \le -1$$

$$\%MP \le \%5 \Rightarrow \xi > 0.7 \Rightarrow \theta \le 45^o$$

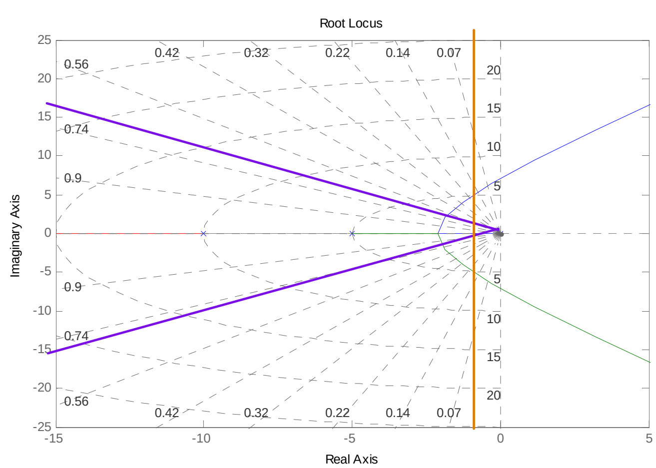
طراحی بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

ادامه مثال ۸:

$$T_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \le 4 \Rightarrow -\xi\omega_n \le -1$$

$$\%MP \le \%5 \Rightarrow \xi > 0.7 \Rightarrow \theta \le 45^o$$

$$\boxed{0.7 \le k \le 1.6}$$



طراحی جبرانساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مراحل طراحی جبرانساز پیش افت فاز (*Phase Lead*):

$$C(s)=\frac{s+z}{s+p},\quad \boxed{-z>-p}$$

۱- مشخص نمودن خواص مطلوب

۲- تعبیر نمودن مشخصات مطلوب به محل قطب

۳- رسم مکان هندسی ریشه های معادله مشخصه جبران نشده و تحلیل مساله طراحی

۴- در صورت نیاز به جبرانساز، صفر جبرانساز را در زیر محل قطب های مطلوب (یا سمت چپ اولین دو قطب حقیقی) قرار دهید.

۵- محل قطب جبرانساز را بطوری تعیین کنید که شرط زاویه برای قطب مطلوب برآورده گردد.

طراحی جبرانساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مثال ۹:

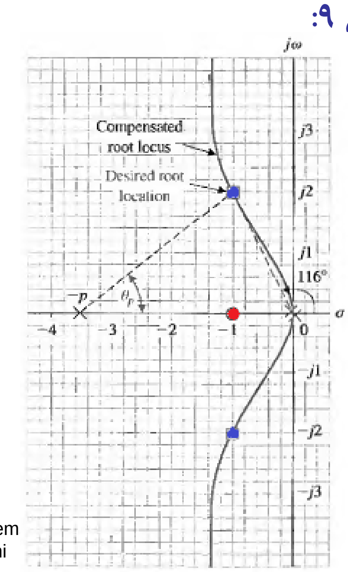
$$kGH(s)=\frac{k}{s^2}$$

$$\text{desire performance}:\begin{cases} t_s\le 4\\ \%MP\le\%35\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases} -\xi\omega_n\le -1\\ \xi\ge 0.32\rightarrow\theta<71^o\end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow -1\pm j2}$$

انتخاب محل صفر: $\boxed{z=-1}$



طراحی جبرانساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مثال ۹:

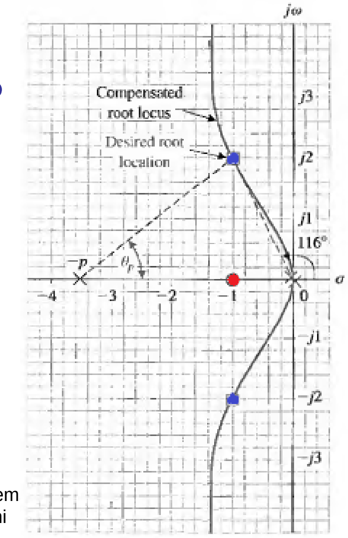
$$kGH(s)=\frac{k}{s^2}$$

شرط زاویه برای قطب مطلوب:

$$90-2(116)-\theta_p=-180\rightarrow\theta_p=38^o$$

$$\Rightarrow -p=-3.6$$

$$\Rightarrow C(s)=\frac{s+1}{s+3.6}$$



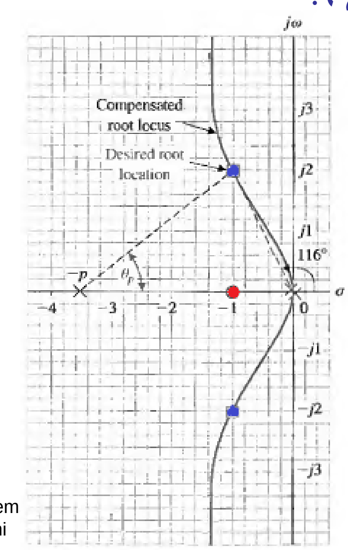
طراحی جبرانساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

مثال ۹:

تعیین بهره ثابت:

با استفاده از شرط دامنه در محل قطب مطلوب

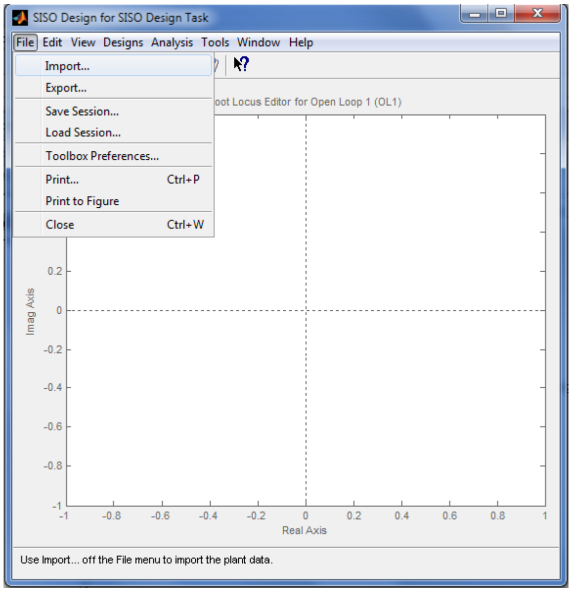
$$k=\frac{2.23^2\times 3.25}{2}=8.2$$



طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

مثال ۹ (sisotool):

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

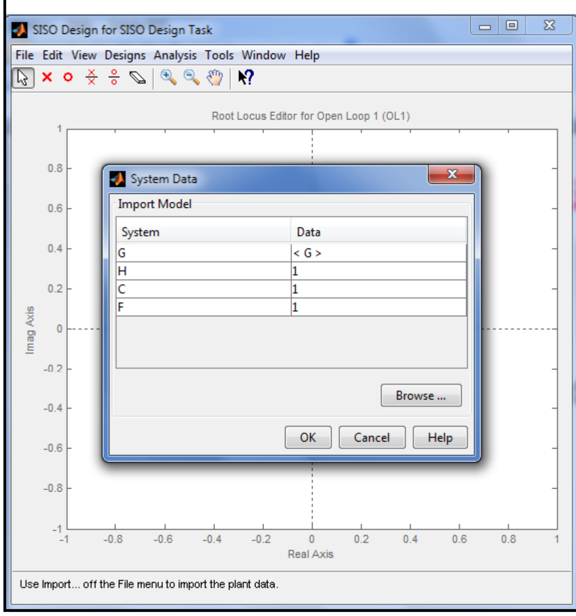


29

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

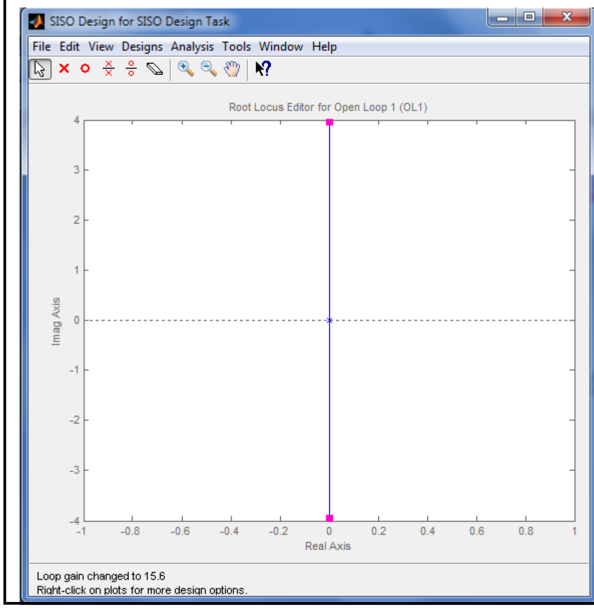
مثال ۹ (sisotool):

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$



30

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



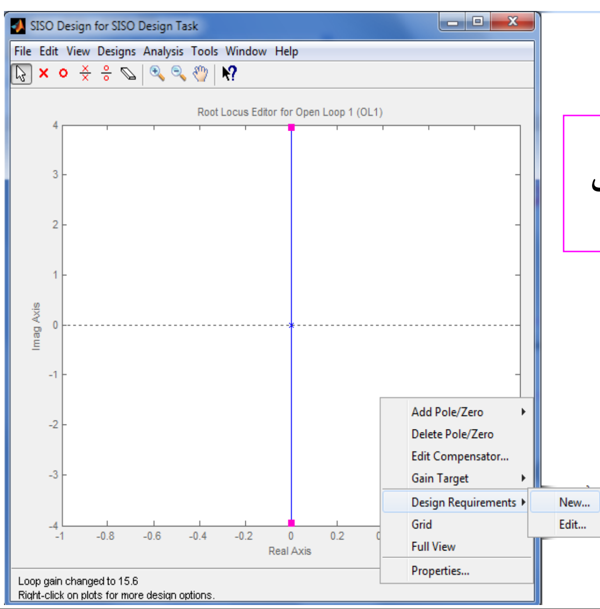
مثال ۹ (sisotool):

رسم مکان هندسی سیستم جبران نشده

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

31

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



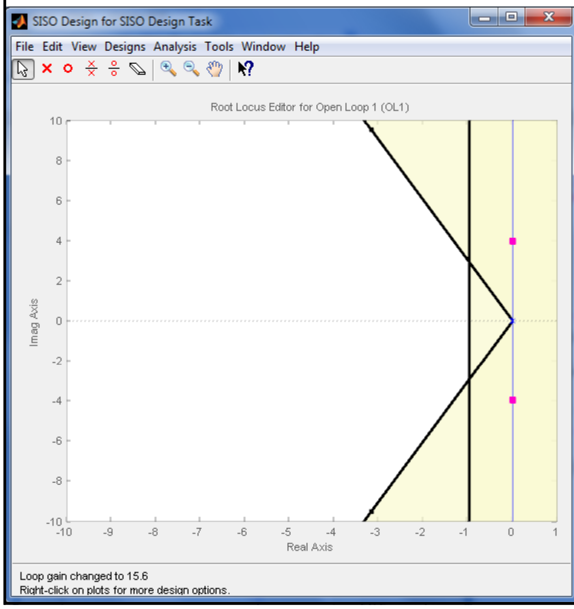
مثال ۹ (sisotool):

مشخص نمودن ناحیه های مد نظر با توجه محدودیت های مطرح در طراحی

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

32

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



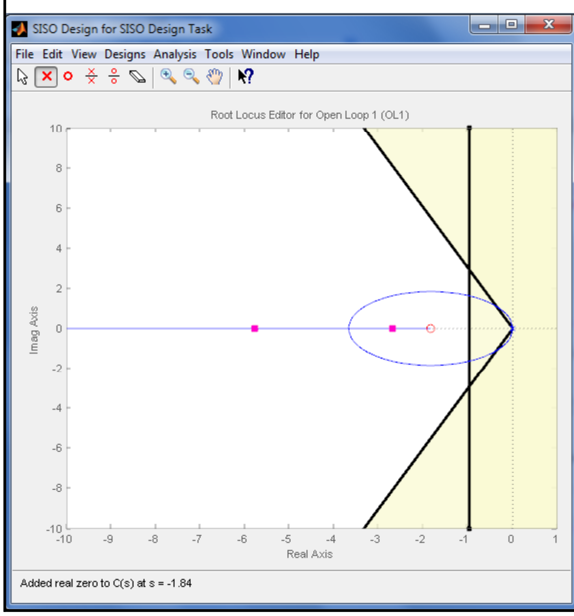
مثال ۹ (sisotool):

مشخص نمودن ناحیه های مد نظر با توجه محدودیت های مطرح در طراحی

$$GH(s) = \frac{1}{s^2}$$

33

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



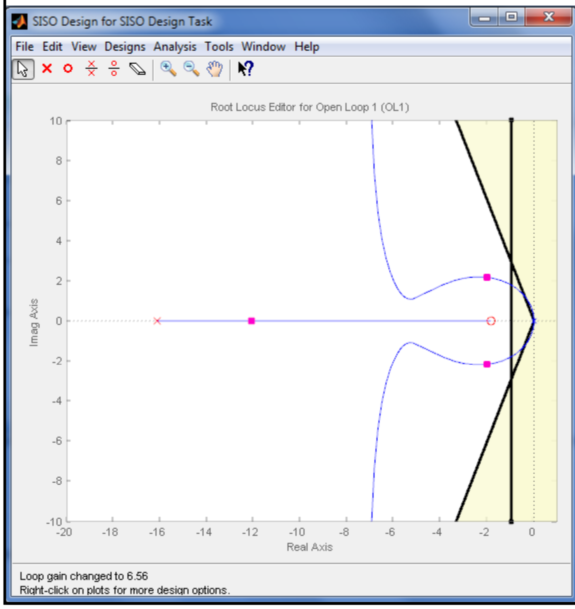
مثال ۹ (sisotool):

- انتخاب محل قطب های مطلوب $-2 \pm j2$
- انتخاب و اضافه نمودن آن محل صفر جبرانساز بر اساس محل قطب مطلوب $z = -2$

34

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

مثال ۹ (sisotool):

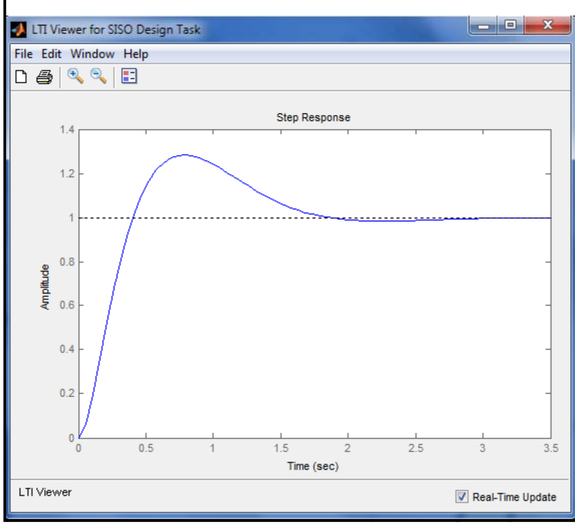


- اضافه نمودن قطب به منظور رسیدن به محل قطب مطلوب $-2 \pm j2$

35

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

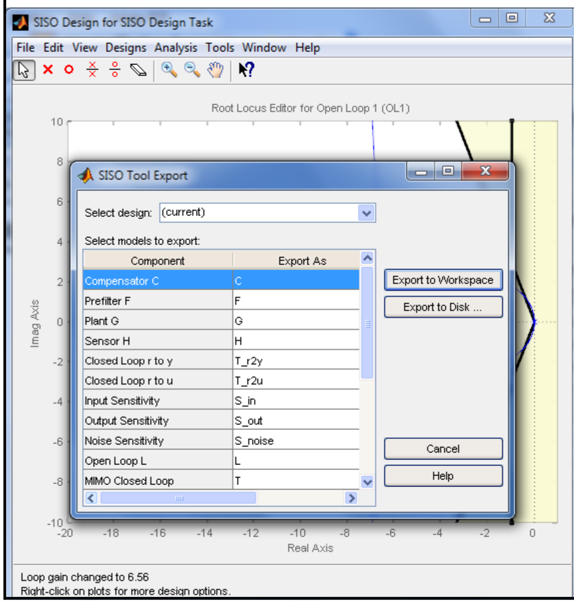
مثال ۹ (sisotool):



- مشاهده پاسخ پله (با استفاده از بخش Analysis)

36

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



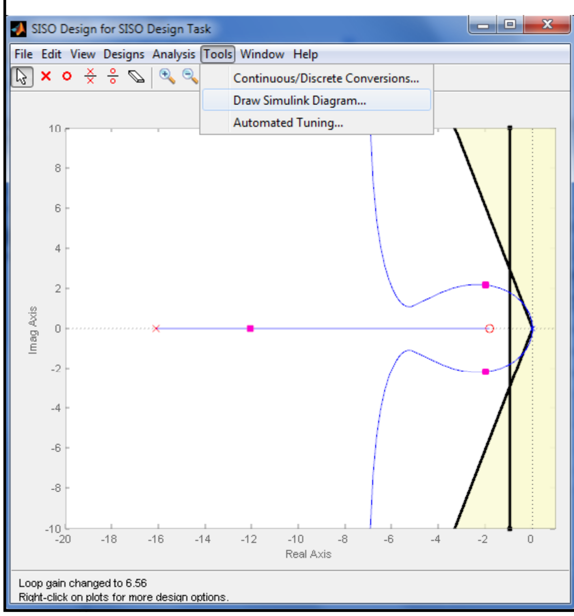
مثال ۹ (sisotool):

- دریافت اطلاعات جبرانساز

```
57.4894 (s+1.84)
----------------
   (s+16.12)
```

37

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool



مثال ۹ (sisotool):

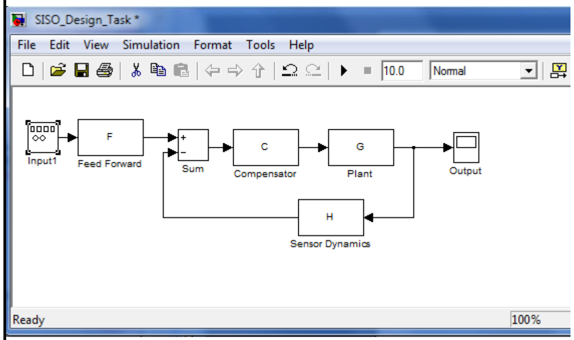
- استخراج مدل simulink

38

طراحی جبرانساز پیش افت فاز با استفاده از sisotool

مثال ۹ (sisotool):

- استخراج مدل simulink



قابلیت جبرانساز پیش افت فاز:

۱- افزایش سرعت سیستم (افزایش پهنای باند).
۲- کاهش زمان نشست.
۳- کاهش فراجهش ماکزیمم

❊ توجه: در صورتی که با استفاده از روند طراحی گفته شده در بالا به خواص مطلوب دست نیافتید. لازم است محل صفر جبرانساز را تغییر داده و روند طراحی را مجددا انجام داد.

طراحی جبرانساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

پروژه ۱:

الف) برای سیستمی با تابع تبدیل زیر جبرانسازی طراحی نمایید که به شرایط مطلوب $\xi = 0.45$ و $\omega_n \le 2$ دست یابد.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

ب) برای سیستم فوق جبرانسازی طراحی نمایید که به شرایط مطلوب فوق و زمان نشست کمتر (مساوی نباشد) از ۴ ثانیه بتوان دست یافت.

طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

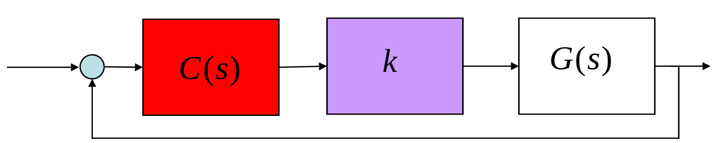
جبرانساز پس افت فاز:

$$C(s) = k_c \frac{s+z_c}{s+p_c}, \quad \boxed{-z_c < -p_c}$$

• این جبرانساز در مواقعی که پاسخ حالت گذرا مطلوب است ولیکن نیاز به بهبود وضعیت خطای حالت ماندگار وجود دارد، کاربرد خواهد داشت.

به این منظور، محل صفر و قطب جبرانسار بسیار نزدیک به هم انتخاب و همچنین نزدیک به مبدا انتخاب می گردند.

$$C(s) = \frac{p_c}{z_c}\frac{s+z_c}{s+p_c} = k_c \frac{s+z_c}{s+p_c}$$



طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

$$|C(s_1)| = \frac{p_c}{z_c}\frac{s_1+z_c}{s_1+p_c} = k_c\frac{|s_1+z_c|}{|s_1+p_c|} \approx k_c$$

k_0 بهره لازم برای رسیدن به **پاسخ حالت گذرا مطلوب**:

$$k_0|GH(s_1)| = 1 \Rightarrow |GH(s_1)| = \frac{1}{k_0}$$

k بهره لازم برای رسیدن به **خطای حالت ماندگار مطلوب**:

$$k|GH(s_1)||C(s_1)| = 1 \Rightarrow k\frac{1}{k_0}k_c = 1 \Rightarrow \boxed{k_c = \frac{k_0}{k}} \Rightarrow p_c = k_c z_c$$

طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

روند طراحی:

۱- رسم مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده و تعیین بهره k_0 به منظور دست یافتن به نسبت میرایی مطلوب (یا خواص حالت گذرای مطلوب)

$$k_0|GH(s)| = 1 \Rightarrow |GH(s)| = \frac{1}{k_0}$$

۲- تعیین بهره k به منظور برآورده شدن خواص حالت ماندگار (خطای حالت ماندگار مورد نظر).

$$e_{ss}|_{r(t)=u(t)} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} kC(s)GH(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} kGH(s)}$$

$$e_{ss}|_{r(t)=tu(t)} = \frac{1}{k_v}$$

$$e_{ss}|_{r(t)=0.5t^2u(t)} = \frac{1}{k_a}$$

طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

روند طراحی:

۳- تعیین بهره k_c با استفاده از:

$$k_c = \frac{k_0}{k} = \frac{\text{gain to satisfy the TRANSIENT response}}{\text{gain to satisfy the STEADY STATE response}}$$

۴- تعیین محل صفر و قطب با انتخاب صفر نزدیک به مبدا و استفاده از رابطه :

$$p_c = k_c z_c$$

۵- مشاهده پاسخ زمانی و بررسی نتایج.

طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

مثال:

سیستم زیر را در نظر بگیرید. جبرانسازی طراحی نمایید که به شرایط زیر را برآورده نماید:

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ e_{ss}\,|_{r(t)=u(t)} = 0.0845 \end{cases}$$

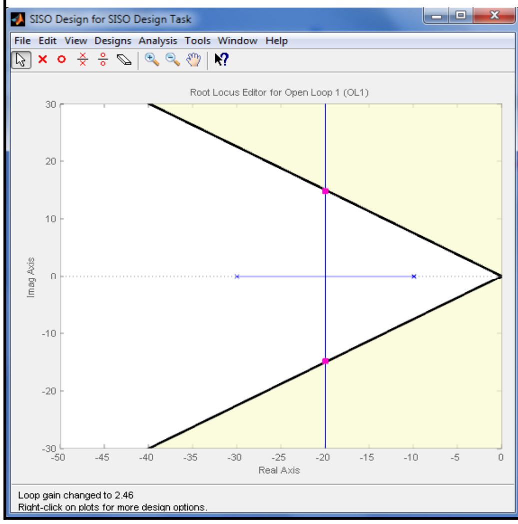
$$G(s) = \frac{130}{(s+10)(s+30)}$$

طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

مثال ۱۰:

$$G(s)=\frac{130}{(s+10)(s+30)}\qquad \begin{cases}\xi=0.8\\ e_{ss}\,|_{r(t)=u(t)}=0.0845\end{cases}$$

تعیین بهره k_0



$$\xi=0.8\Rightarrow\quad k_0=2.46$$

$$e_{ss\_k_0}=\frac{1}{1+\dfrac{130\times k_0}{10\times 30}}=0.48>0.0845$$

طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

مثال ۱۰:

$$G(s)=\frac{130}{(s+10)(s+30)}\qquad \begin{cases}\xi=0.8\\ e_{ss}\,|_{r(t)=u(t)}=0.0845\end{cases}$$

تعیین بهره k

$$e_{ss}=\frac{1}{1+\dfrac{130\times k}{10\times 30}}=0.0845\Rightarrow k=25\qquad\Rightarrow k_c=\frac{k_0}{k}=\frac{2.46}{25}=0.0984$$

$$\Rightarrow p_c=k_c z_c \overset{\substack{\text{choose } z_c \text{ arbitrary}\\ \text{close to origin}}}{=} 0.0984\times 1.5\simeq 0.15$$

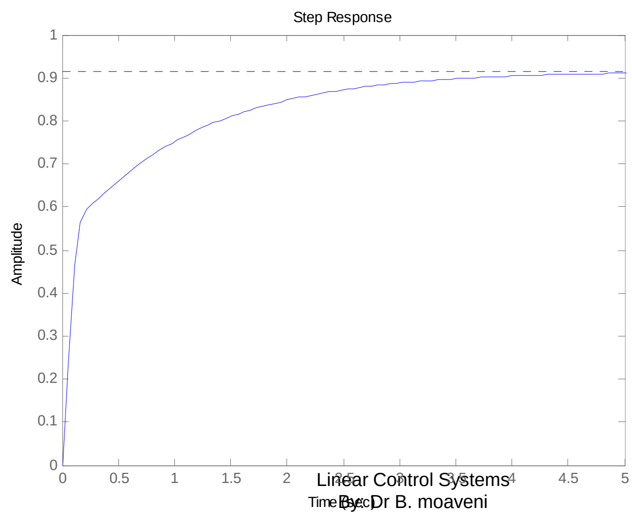
$$\Rightarrow\quad C(s)=\frac{0.0984(s+1.5)}{(s+0.15)}$$

طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):

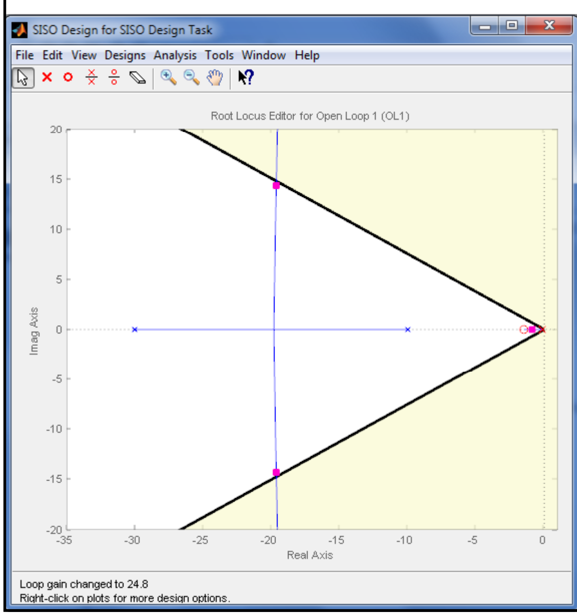
مثال ۱۰:

$$G(s)=\frac{130}{(s+10)(s+30)}$$

$$\begin{cases}\xi=0.8\\ e_{ss}\,|_{r(t)=u(t)}=0.0845\end{cases}$$



طراحی جبرانساز پس افت فاز (*Phase Lag*):



مثال ۱۰:

مکان هندسی ریشه های سیستم جبران شده:

$C(s)GH(s)$

طراحی جبرانساز پیش افت فاز بر اساس رسم مکان هندسی ریشه ها

پروژه ۲:

الف) برای سیستمی با تابع تبدیل زیر جبرانسازی طراحی نمایید که شرایط مطلوب زیر را برآورده نماید.

$$G(s)=\frac{2(s+1)}{(s^2+2s+2)}$$

$$\begin{cases}\%MP \le 5\% \\ e_{ss}=0.1\end{cases}$$

طراحی جبرانساز *Lead-Lag*:

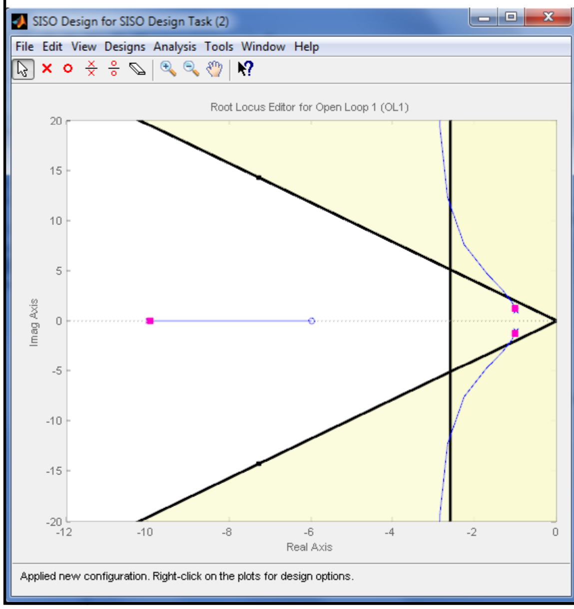
در صورتی که به خواص هر دو جبرانساز lead و lag نیاز باشد لازم است از ترکیب آنها به صورت lead-lag استفاده نمود. مثال زیر به منظور روشن شدن بحث راهگشا است.

مثال ۱۱:

$$GH(s)=\frac{s+6}{(s+10)(s^2+2s+2)}$$

$$\begin{cases}\%MP \le \%20 \\ t_s \le 1.5 \\ e_{ss}\,|_{r(t)=u(t)} \le 0.001\end{cases}$$

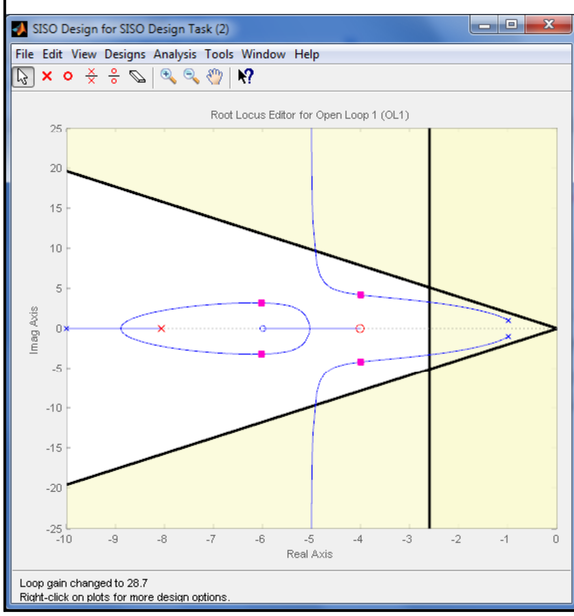
طراحی جبرانساز *Lead-Lag*:



ادامه مثال ۱۱:

با استفاده از بهره تناسبی امکان برآورده شدن خواص حالت گذرا وجود ندارد. در نتیجه به جبرانساز lead نیاز است.

طراحی جبرانساز *Lead-Lag*:



ادامه مثال ۱۱:

قطب های غالب مطلوب

$-4 \pm j4$

محل صفر جبران ساز

-4

تابع تبدیل جبرانساز:

```
57.6235 (s+4.02)
----------------
   (s+8.069)
```

طراحی جبرانساز *Lead-Lag*:

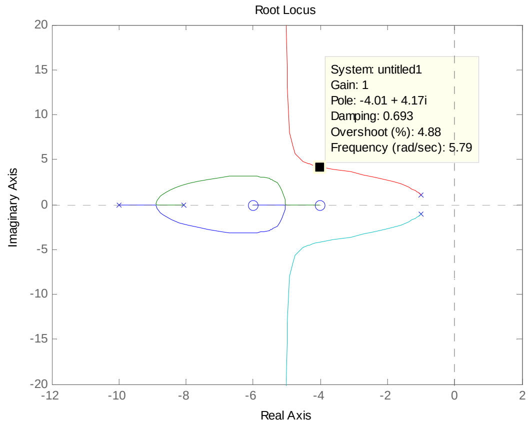
ادامه مثال ۱۱:

قطب های غالب مطلوب

$-4 \pm j4$

محل صفر جبران ساز

-4



تابع تبدیل جبرانساز:

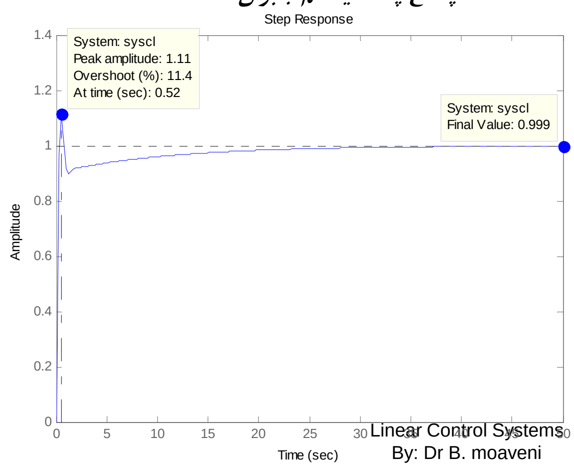
```
57.6235 (s+4.02)
----------------
   (s+8.069)
```


طراحی جبرانساز *Lead-Lag*:

ادامه مثال ۱۱:

(طراحی بخش ***lag***)

پاسخ پله سیستم جبران شده

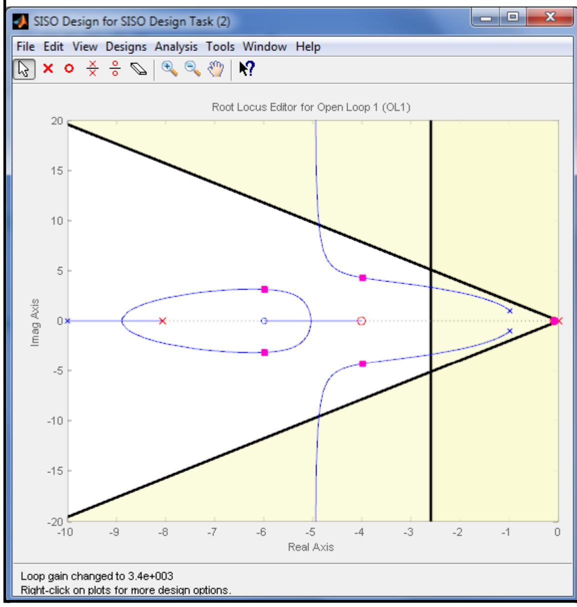


$$e_{ss} = \frac{1}{1+G(0)C_{lead}(0)} = 0.001 \Rightarrow k = 116$$

$$\Rightarrow k_c = 0.0086$$

$$z_c = 0.1 \rightarrow p_c = 0.00086$$

طراحی جبرانساز *Lead-Lag*:



ادامه مثال ۱۱:

(در حضور *lead-lag*)

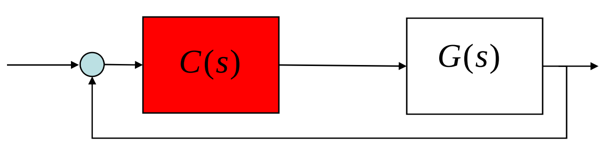
```
>> C

Transfer function:
0.4967 s^2 + 2.046 s + 0.1997
-----------------------------
   s^2 + 8.07 s + 0.006956
```


طراحی کنترل کننده *PD*:

کنترل کننده PD:

$$\boxed{C(s)=k_D s+k_p=k_D(s+\frac{k_p}{k_D})=k_D(s+z_c)}$$

- این کنترل کننده به منظور دست یافتن به پاسخ حالت گذرای مطلوب کاربرد دارد.



طراحی کنترل کننده *PD*:

روند طراحی کنترل کننده PD:

۱- مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده را رسم کنید و لزوم اعمال یک کنترل کننده **PD** را بررسی کنید.

۲- با توجه به خواص مطلوب حلقه بسته(s_1)، محدوده مناسب صفحه را مشخص کنید و قطب های (غالب) مطلوب را مشخص نمایید.

۳- محل صفر کنترل کننده **PD** را با استفاده از شرط زاویه برای قطب غالب پیدا کنید.

$$\theta_{z_c} + \sum_i \theta_{z_i} - \sum_j \theta_{p_j} = (2n+1)\pi$$

طراحی کنترل کننده *PD*:

روند طراحی کنترل کننده PD:

۴- با استفاده از شرط دامنه در محل قطب های غالب (s_1) بهره k_D را بدست آورید.

۵- بهره k_p را با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمایید.

$$z_c = \frac{k_p}{k_D} \Rightarrow k_p = z_c k_D$$

طراحی کنترل کننده *PD*:

مثال ۱۲:

برای سیستم زیر یک کنترل کننده **PD** طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+5)}$$

$$\begin{cases}\xi=0.707\\ t_s=2(\text{sec})\end{cases}$$

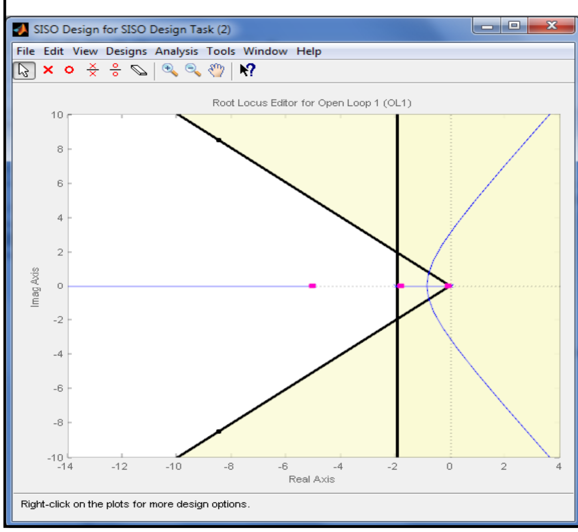
طراحی کنترل کننده *PD*:

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+5)} \qquad \begin{cases}\xi=0.707\\ t_s=2(\text{sec})\end{cases}$$

ادامه مثال ۱۲:

ابتدا رسم مکان هندسی سیستم جبران نشده و مشخص نمودن شرایط مطلوب

* توجه: با استفاده از بهره تناسبی امکان پایدارسازی وجود ندارد.



طراحی کنترل کننده PD:

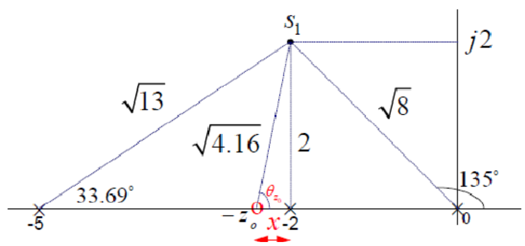
$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+5)}\qquad \begin{cases}\xi=0.707\\ t_s=2(\text{sec})\end{cases}$$

ادامه مثال ۱۲:

۲- انتخاب محل قطب های (غالب) مطلوب

$$s_1=-2\pm j2$$

۳- پیدا نمودن محل صفر با استفاده از شرط زاویه در محل قطب مطلوب



$$\theta_{z_0}-(33.69+90+135)=-180$$

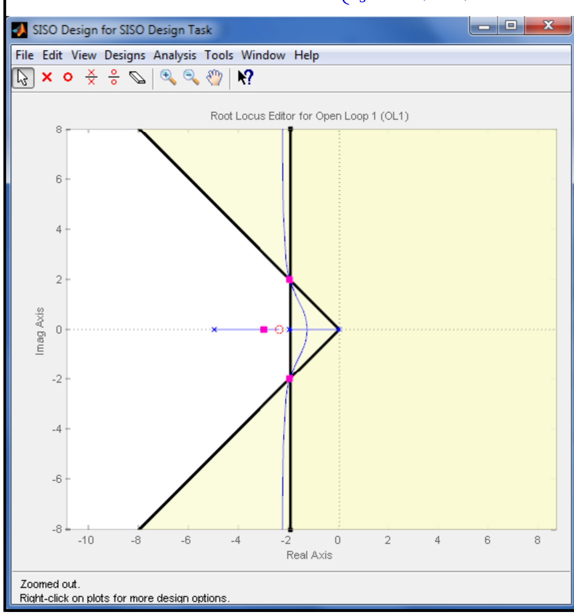
$$\Rightarrow\quad \theta_{z_0}=78.69$$

$$\Rightarrow x=2\times\tan(78.69)=0.4$$

$$\Rightarrow z_0=2.4$$

طراحی کنترل کننده PD:

$$G(s)=\frac{1}{s(s+2)(s+5)}\qquad \begin{cases}\xi=0.707\\ t_s=2(\text{sec})\end{cases}$$



ادامه مثال ۱۲:

۴- یافتن بهره k_D با استفاده از شرط دامنه برای قطب مطلوب

$$k_D=\frac{\left(\sqrt{8}\right)(2)\left(\sqrt{13}\right)}{\left(\sqrt{4.16}\right)}\cong 10$$

۵- محاسبه k_p

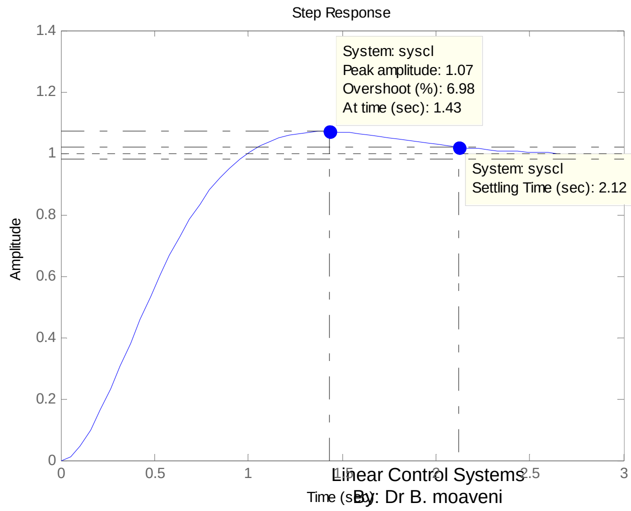
$$k_p=z_0\times k_D=24$$

$$\boxed{\Rightarrow C(s)=24+10s}$$

طراحی کنترل کننده *PD*:

ادامه مثال ۱۲:

مشاهده پاسخ زمانی



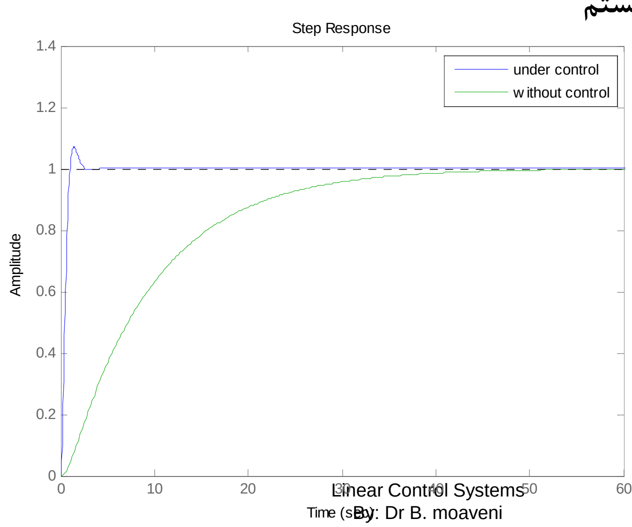
Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

65

طراحی کنترل کننده *PD*:

ادامه مثال ۱۲:

مقایسه پاسخ زمانی سیستم
با و بدون کنترل کننده



Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

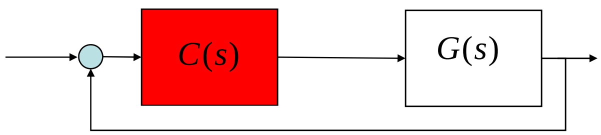
66

طراحی کنترل کننده *PI*:

کنترل کننده PI:

$$C(s)=k_p+\frac{k_I}{s}=\frac{k_p(s+\frac{k_I}{k_p})}{s}=\frac{k_p(s+z_0)}{s}$$

• این کنترل کننده به منظور دست یافتن به <u>پاسخ حالت ماندگار مطلوب (افزایش نوع سیستم و خذف خطای حالت ماندگار)</u> کاربرد دارد.



طراحی کنترل کننده *PI*:

روند طراحی کنترل کننده PI:

* روند طراحی بسیار شبیه طراحی کنترل کننده **PD** است.

۱- مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده را به همراه قطب در مبدا کنترل کننده رسم کنید.

۲- با توجه به خواص مطلوب حلقه بسته محدوده مناسب صفحه را مشخص کنید و قطب های (غالب) مطلوب (s_1)، را مشخص نمایید.

۳- محل صفر کنترل کننده PI را با استفاده از شرط زاویه برای قطب غالب پیدا کنید.

$$\theta_{z_0}+\sum_i\theta_{z_i}-\sum_j\theta_{p_j}=(2n+1)\pi$$

طراحی کنترل کننده *PI*:

روند طراحی کنترل کننده PI:

۴- با استفاده از شرط دامنه در محل قطب های غالب (s_1) بهره k_p را بدست آورید.

۵- بهره k_p را با استفاده از رابطه زیر محاسبه نمایید.

$$z_c = \frac{k_I}{k_p} \Rightarrow k_I = k_p z_c$$

طراحی کنترل کننده *PI*:

مثال ۱۳:

برای سیستم زیر یک کنترل کننده PI طراحی نمایید که خطای حالت ماندگار نسبت به ورودی پله را از بین برده و شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases} \xi = 0.8 \\ t_s = 1(\sec) \end{cases}$$

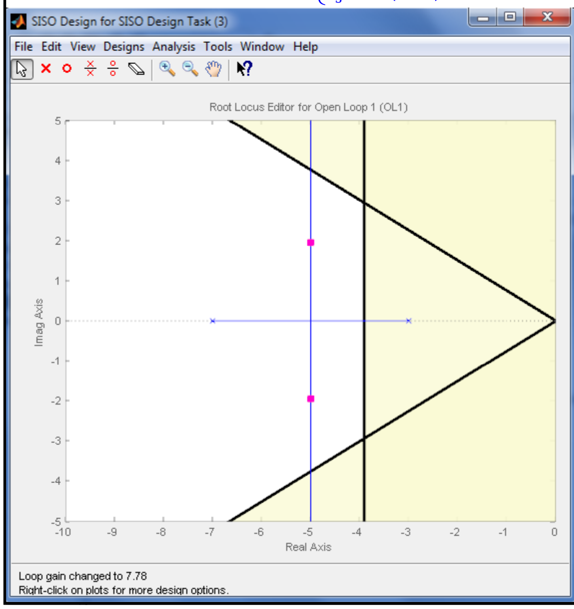
طراحی کنترل کننده *PI*:

$$G(s)=\frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases}\xi=0.8\\ t_s=1(\mathrm{sec})\end{cases}$$

ادامه مثال ۱۳:

۱- رسم نموداربود سیستم جبران نشده .



71

طراحی کنترل کننده *PI*:

$$G(s)=\frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

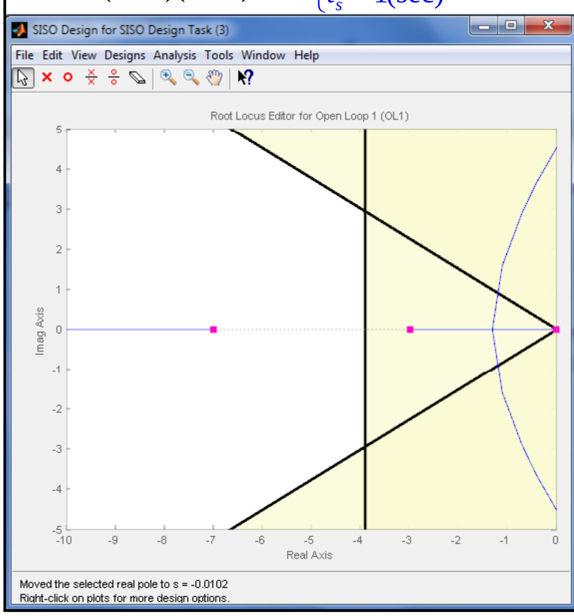
$$\begin{cases}\xi=0.8\\ t_s=1(\mathrm{sec})\end{cases}$$

ادامه مثال ۱۳:

۱- رسم نموداربود سیستم جبران نشده با حضور قطب در مبدا کنترل کننده.

۲- تعیین محل قطب مطلوب

$$-4\pm 3j$$

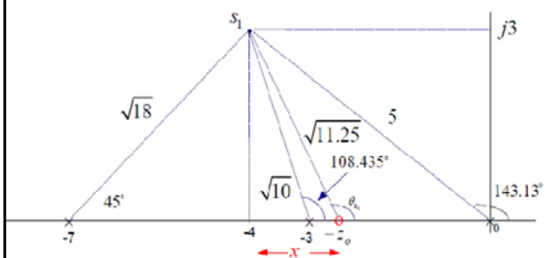


72

$$G(s)=\frac{1}{(s+3)(s+7)} \qquad \begin{cases}\xi=0.8\\ t_s=1(\sec)\end{cases}$$

طراحی کنترل کننده *PI*:

ادامه مثال ۱۳:



۳- تعیین محل صفر کنترل کننده با استفاده از شرط زاویه

$$\theta_{z_0}-(143.13+108.435+45)=-180$$

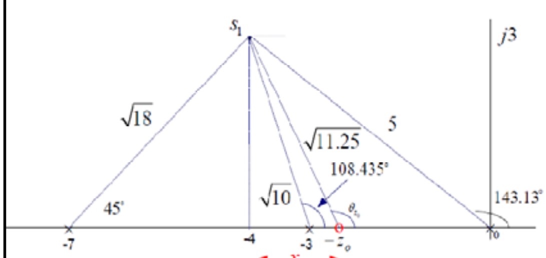
$$\Rightarrow \quad \theta_{z_0}=116.565$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{3}{\tan(180-116.565)}\Rightarrow z_0=4-x=2.5=\frac{k_I}{k_p}$$

$$G(s)=\frac{1}{(s+3)(s+7)} \qquad \begin{cases}\xi=0.8\\ t_s=1(\sec)\end{cases}$$

طراحی کنترل کننده *PI*:

ادامه مثال ۱۳:



۴- تعیین بهره k_p با استفاده از شرط دامنه

$$k_p=\frac{\left(\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{10}\right)(5)}{\left(\sqrt{11.25}\right)}=20$$

۵- تعیین بهره انتگرالگیر

$$\Rightarrow k_I=20\times 2.5=50$$

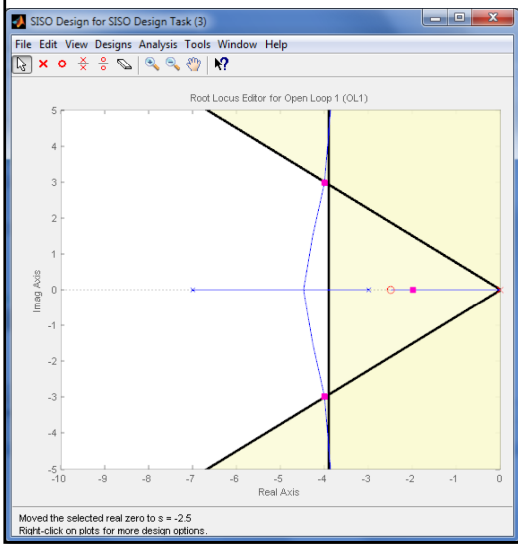
طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:

$$G(s)=\frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases}\xi = 0.8\\ t_s = 1(\sec)\end{cases}$$

رسم مکان هندسی ریشه های
سیستم جبران شده و بررسی نتایج



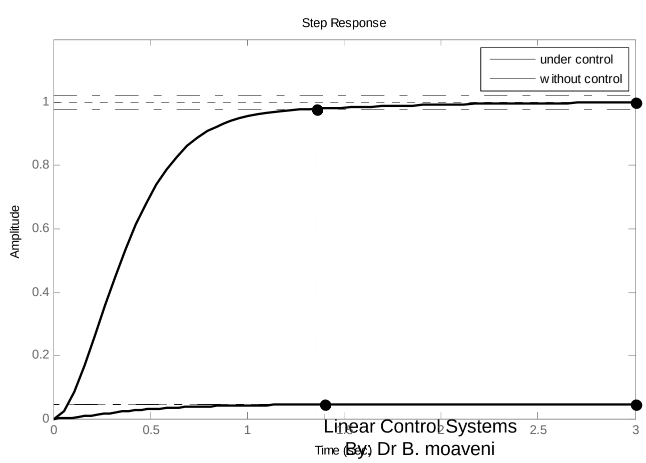
طراحی کنترل کننده PI:

ادامه مثال ۱۳:

$$G(s)=\frac{1}{(s+3)(s+7)}$$

$$\begin{cases}\xi = 0.8\\ t_s = 1(\sec)\end{cases}$$

پاسخ پله با حضور کنترل کننده و
بدون حضور کنترل کننده

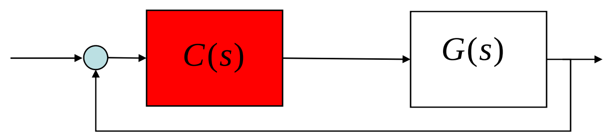


طراحی کنترل کننده *PID*:

کنترل کننده PID:

$$C(s) = k_p + \frac{k_I}{s} + k_D s = \bar{k}_D (s + z_{PD}) \frac{\bar{k}_p (s + z_{PI})}{s}$$

• این کنترل کننده به منظور دست یافتن به خواص هر دو کنترل کننده PI و PD کاربرد دارد.



طراحی کنترل کننده *PID*:

روند طراحی کنترل کننده PID:

۱- مکان هندسی ریشه های سیستم جبران نشده را رسم نموده و تحلیل نمایید.

۲- یک کنترل کننده PD به منظور دست یافتن به خواص حالت گذرای مطلوب حلقه بسته طراحی نمایید.

۳- یک کنترل کننده PI به منظور دست یافتن به خواص حالت ماندگار مطلوب حلقه بسته طراحی نمایید.

۴- با رسم مکان هندسی سیستم جبران شده و مشاهده پاسخ زمانی درستی طراحی را بررسی نمایید.

طراحی کنترل کننده *PID*:

پروژه

برای سیستم زیر یک کنترل کننده طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s)=\frac{s+10}{(s+1)(s+2)(s+12)}$$

$$\begin{cases} \%MP \le \%20 \\ t_s = 1.5(\sec) \\ e_{ss}\,|_{r(t)=u(t)} = 0 \end{cases}$$

ویژگی های جبرانساز ها و کنترل کننده ها:

Table 9.7 Types of cascade compensators

Function	Compensator	Transfer function	Characteristics
Improve steady-state error	PI	$K\frac{s+z_c}{s}$	1. Increases system type. 2. Error becomes zero. 3. Zero at $-z_c$ is small and negative. 4. Active circuits are required to implement.
Improve steady-state error	Lag	$K\frac{s+z_c}{s+p_c}$	1. Error is improved but not driven to zero. 2. Pole at $-p_c$ is small and negative. 3. Zero at $-z_c$ is close to, and to the left of, the pole at $-p_c$. 4. Active circuits are not required to implement.
Improve transient response	PD	$K(s+z_c)$	1. Zero at $-z_c$ is selected to put design point on root locus. 2. Active circuits are required to implement. 3. Can cause noise and saturation; implement with rate feedback or with a pole (lead).
Improve transient response	Lead	$K\frac{s+z_c}{s+p_c}$	1. Zero at $-z_c$ and pole at $-p_c$ are selected to put design point on root locus. 2. Pole at $-p_c$ is more negative than zero at $-z_c$. 3. Active circuits are not required to implement.

ویژگی های جبرانساز ها و کنترل کننده ها:

Table 9.7 Types of cascade compensators

Function	Compensator	Transfer function	Characteristics
Improve steady-state error and transient response	PID	$K\dfrac{(s+z_{\mathrm{lag}})(s+z_{\mathrm{lead}})}{s}$	1. Lag zero at $-z_{\mathrm{lag}}$ and pole at origin improve steady-state error. 2. Lead zero at $-z_{\mathrm{lead}}$ improves transient response. 3. Lag zero at $-z_{\mathrm{lag}}$ is close to, and to the left of, the origin. 4. Lead zero at $-z_{\mathrm{lead}}$ is selected to put design point on root locus. 5. Active circuits required to implement. 6. Can cause noise and saturation; implement with rate feedback or with an additional pole.
Improve steady-state error and transient response	Lag-lead	$K\dfrac{(s+z_{\mathrm{lag}})(s+z_{\mathrm{lead}})}{(s+p_{\mathrm{lag}})(s+p_{\mathrm{lead}})}$	1. Lag pole at $-p_{\mathrm{lag}}$ and lag zero at $-z_{\mathrm{lag}}$ are used to improve steady-state error. 2. Lead pole at $-p_{\mathrm{lead}}$ and lead zero at $-z_{\mathrm{lead}}$ are used to improve transient response. 3. Lag pole at $-p_{\mathrm{lag}}$ is small and negative. 4. Lag zero at $-z_{\mathrm{lag}}$ is close to, and to the left of, lag pole at $-p_{\mathrm{lag}}$. 5. Lead zero at $-z_{\mathrm{lead}}$ and lead pole at $-p_{\mathrm{lead}}$ are selected to put design point on root locus. 6. Lead pole at $-p_{\mathrm{lead}}$ is more negative than lead zero at $-z_{\mathrm{lead}}$. 7. Active circuits are not required to implement.

le 9.7

باسمه تعالی

دانشگاه علم و صنعت ایران

سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 7

تحلیل پایداری به روش پاسخ فرکانسی

مقدمه

پس از بررسی و تحلیل عملکرد سیستم ها در فصل های پیشین بر اساس تحلیل های حوزه زمان در این بخش به تحلیل حوزه فرکانس خواهیم پرداخت. نقاط قوت تحلیل حوزه فرکانس عبارت است از:

- امکان تحلیل عملکرد سیستم ها با مرتبه بالا وجود خواهد داشت.
- با توجه به ارتباط حوزه زمان و فرکانس امکان پیش بینی عملکرد حوزه زمان با استفاده از تحلیل حوزه فرکانس وجود دارد.
- امکان تحلیل حساسیت و نیز امکان تحلیل وضعیت حضور نویز وجود دارد.

$$r(t) = R\sin(\omega_0 t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = Y\sin(\omega_0 t + \phi)$$

مقدمه

از طرفی

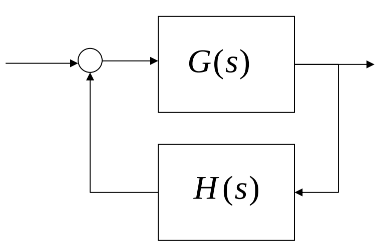
$$Y(s)=G(s)R(s)\xrightarrow{s=j\omega}Y(j\omega)=G(j\omega)R(j\omega)$$

و در نتیجه

$$Y(j\omega)=G(j\omega)R(j\omega)\Rightarrow\begin{cases}Y=\left|G(j\omega_0)\right|R\\ \phi=\measuredangle G(j\omega_0)+0\end{cases}$$

لذا امکان پیش بینی عملکرد سیستم در حوزه زمان و برای دو حالت گذرا و ماندگار بر اساس خواص پاسخ فرکانسی سیستم (بررسی دامنه و فاز) وجود دارد.

تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم حلقه بسته



$$M(s)=\frac{G(s)}{1+GH(s)}$$

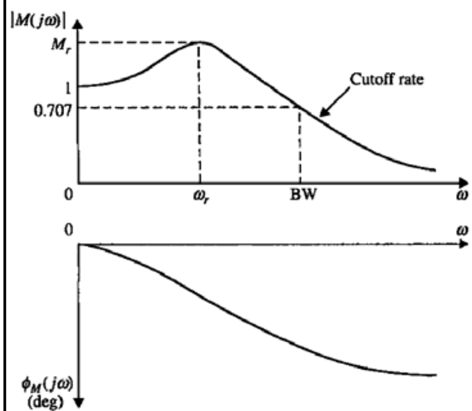
$$\Rightarrow M(j\omega)=\frac{G(j\omega)}{1+GH(j\omega)}=\left|M(j\omega)\right|\measuredangle M(j\omega)=\mathrm{Re}\left[M(j\omega)\right]+\mathrm{Im}\left[M(j\omega)\right]$$

$$\begin{cases}\left|M(j\omega)\right|=\dfrac{\left|G(j\omega)\right|}{\left|1+GH(j\omega)\right|}\\ \measuredangle M(j\omega)=\measuredangle G(j\omega)-\measuredangle\left(1+GH(j\omega)\right)\end{cases}$$

تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم حلقه بسته

پاسخ فرکانسی نوعی یک سیستم حلقه بسته

$$M(s)=\frac{G(s)}{1+GH(s)}$$



M_r : Resonant Peak

- **معیاری از پایداری نسبی**
- **مقدار مناسب** $1.1 < M_r < 1.5$
- **مقدار بزرگ** M_r **مقدار بزرگ فراجهش را نتیجه می دهد.**

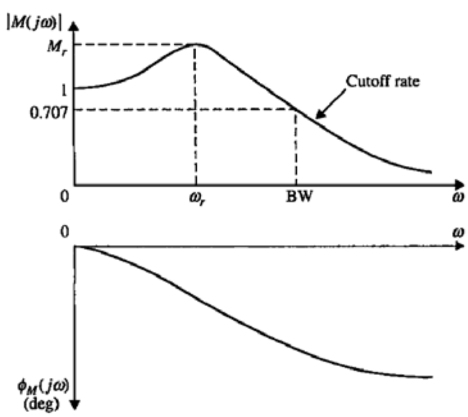
ω_r : Resonant Frequency

BW : $|M(j\omega_c)| = 0.707$

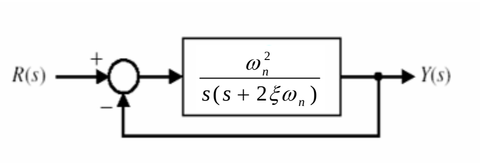
تحلیل پاسخ فرکانسی یک سیستم حلقه بسته

❊ **پهنای باند بیشتر موجب زمان صعود (rise time) کمتر (سریعتر) می شود.**

❊ **در کنار پهنای باند، Cutoff rate معیار مکملی از نحوه حذف نویز می باشد.**

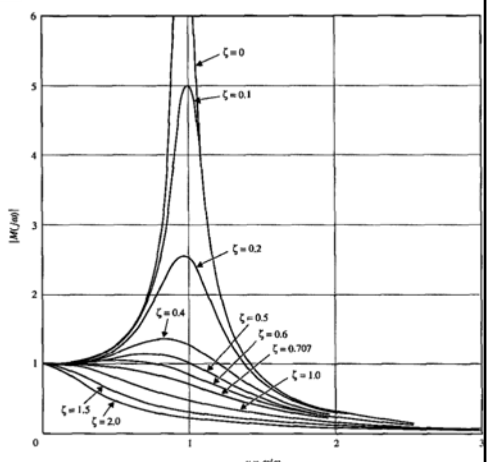


پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه دوم نوعی

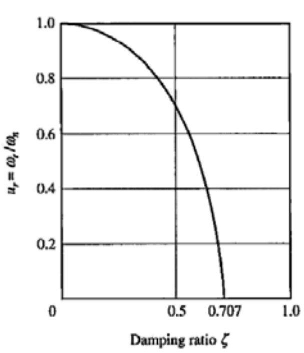


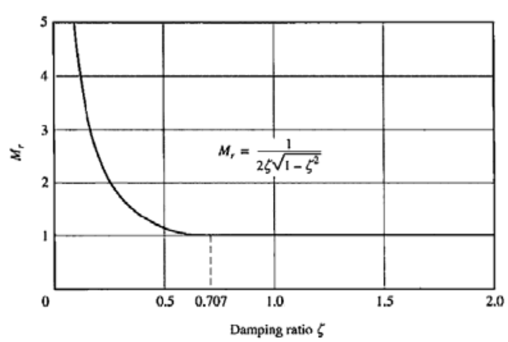
$$M(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\\ \begin{cases}M_r=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} & \xi\le 0.707\\ M_r=0 & \xi>0.707\end{cases}\\ BW=\omega_n\sqrt{\left(1-2\xi^2\right)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}\end{cases}$$



پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه دوم نوعی

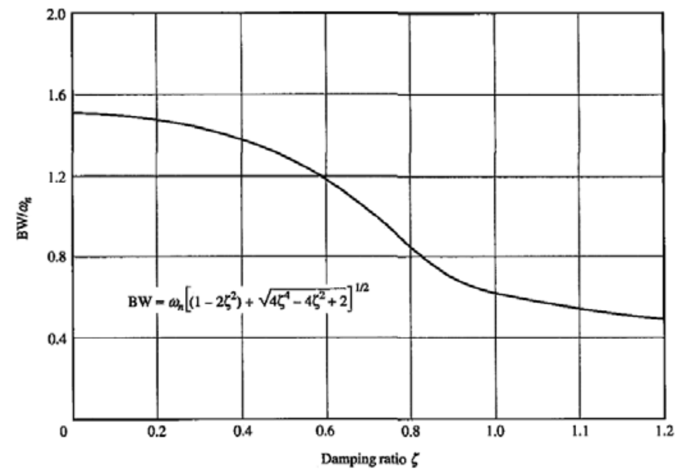




$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

$$M_r=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\qquad \xi\le 0.707$$

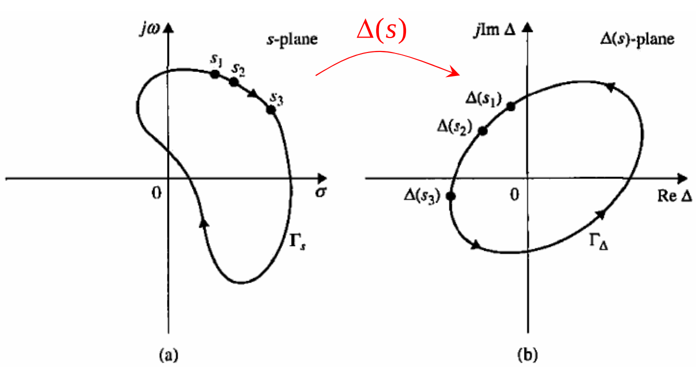
پاسخ فرکانسی یک سیستم مرتبه دوم نوعی



$$BW = \omega_n\sqrt{\left(1-2\xi^2\right)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

تحلیل پایداری نایکوئیست

اصل آرگومان



$$\boxed{N = Z - P}$$

N = number of encirclements of the origin made by the $\Delta(s)$-plane locus Γ_Δ.
Z = number of zeros of $\Delta(s)$ encircled by the s-plane locus Γ_s in the s-plane.
P = number of poles of $\Delta(s)$ encircled by the s-plane locus Γ_s in the s-plane.

تحلیل پایداری نایکوئیست

اصل آرگومان

$$\Delta(s)=1+GH(s)=1+\frac{p(s)}{q(s)}=\frac{q(s)+p(s)}{q(s)}$$

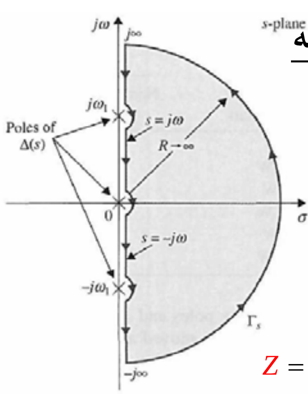
$$\Rightarrow\begin{cases} Z: \text{number of closed loop poles encircled by the s-plane locus } \Gamma_s \\ P: \text{number of open loop poles encircled by the s-plane locus } \Gamma_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z=N+P$$

تحلیل پایداری نایکوئیست

روش نایکوئیست:

به منظور یافتن تعداد قطب های ناپایدار حلقه بسته



$$GH(s) \longrightarrow Nyquist\ \ \Gamma_G$$

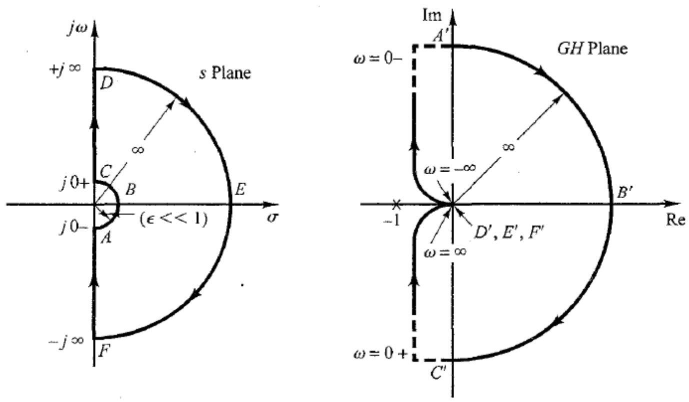
$$Z=N+P$$

$N:$ number of encirclements of $-1+j0$ point made by Γ_G

تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۱:

$$G(s)=\frac{1}{s(Ts+1)},\quad T>0$$



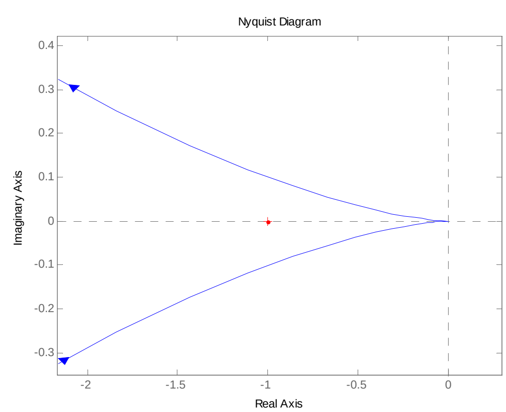
$$\left.\begin{array}{l}P=0\\N=0\end{array}\right\}\Rightarrow Z=0$$

سیستم حلقه بسته پایدار است

تحلیل پایداری نایکوئیست

ادامه مثال ۱:

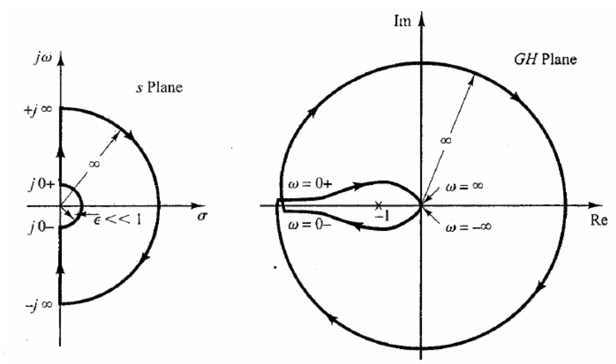
$$G(s)=\frac{1}{s(0.1s+1)}$$



تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۲:

$$G(s)=\frac{1}{s^2(Ts+1)},\quad T>0$$



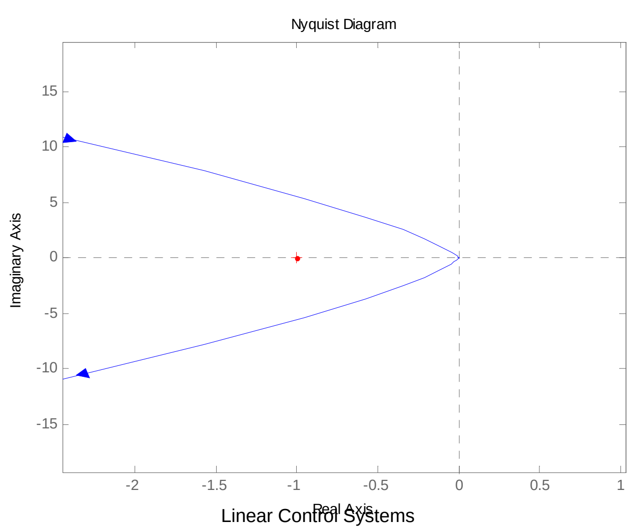
$$\left.\begin{array}{l} P=0 \\ N=2 \end{array}\right\} \Rightarrow Z=2$$

سیستم حلقه بسته دارای دو قطب نا پایدار است

تحلیل پایداری نایکوئیست

ادامه مثال ۲:

$$G(s)=\frac{1}{s^2(0.1s+1)}$$



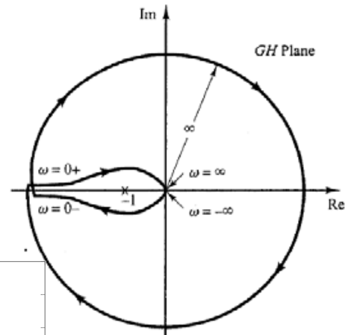
تحلیل پایداری نایکوئیست

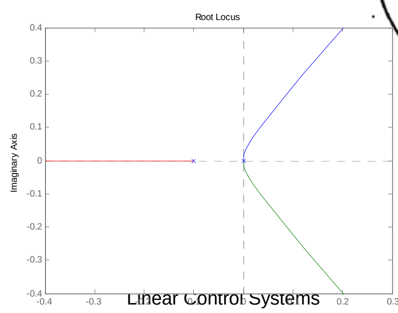
ادامه مثال ۲: تحلیل پایداری به ازای تغییرات بهره

$$G(s)=\frac{k}{s^2(Ts+1)}$$

$$-\frac{1}{k}<0 \to k>0 \to N=2 \Rightarrow z=2$$

$$-\frac{1}{k}>0 \to k<0 \to N=1 \Rightarrow z=1$$

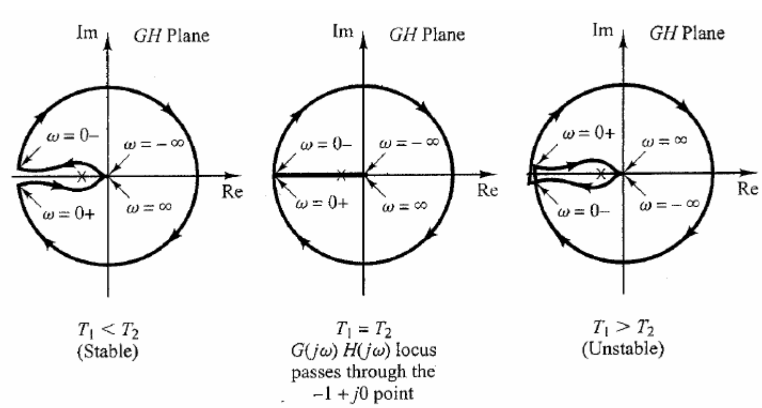




تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۳:

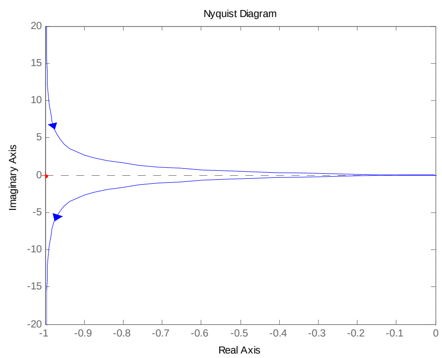
$$G(s)=\frac{(T_2s+1)}{s^2(T_1s+1)}$$

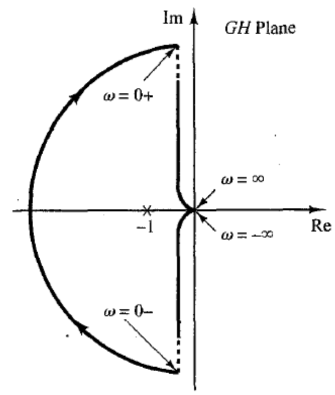


تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۴: (مثالی از سیستم های ناپایدار)

$$G(s) = \frac{1}{s(Ts-1)}$$





$$\left.\begin{aligned} P &= 1 \\ N &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Z = 2$$

سیستم حلقه بسته دارای دو قطب نا پایدار است

تحلیل پایداری نایکوئیست

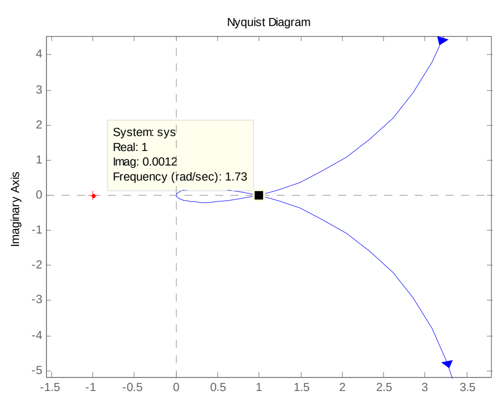
مثال ۵: (مثالی از سیستم های دارای صفر ناپایدار)

$$G(s) = \frac{k(s-3)}{s(s+1)}$$

$$-\frac{1}{k} < 0 \to N = 1 \Rightarrow Z = 1$$

$$0 < -\frac{1}{k} < 1 \to N = 2 \Rightarrow Z = 2$$

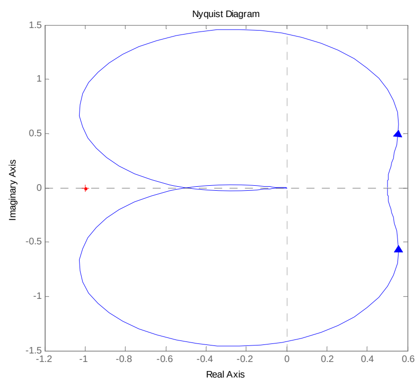
$$1 < -\frac{1}{k} \to N = 0 \Rightarrow Z = 0$$

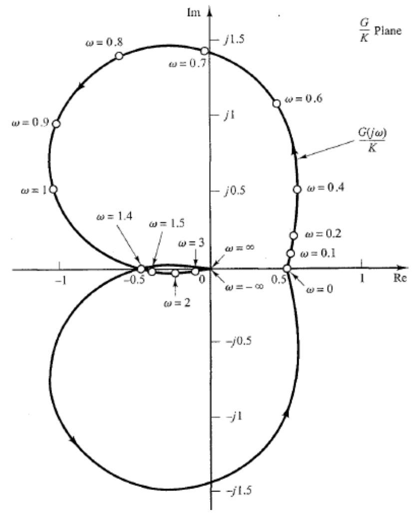


تحلیل پایداری نایکوئیست

مثال ۶: (عدم وجود قطب در مبدا)

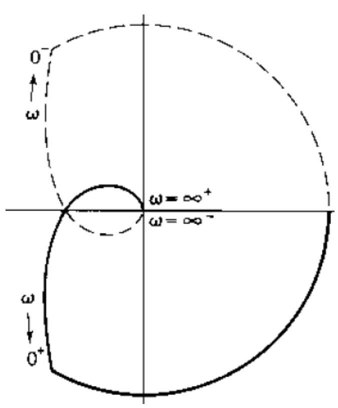
$$G(s)=\frac{s+0.5}{s^3+s^2+1}$$

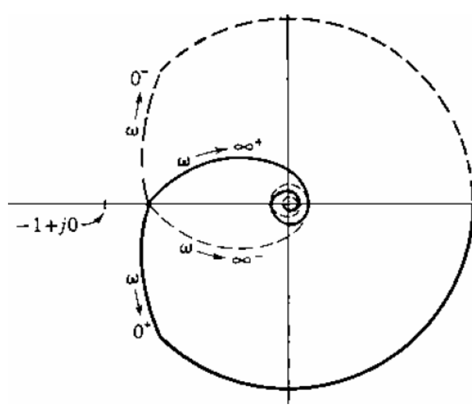




تحلیل پایداری نایکوئیست برای سیستم های تاخیردار

برای یک سیستم تاخیردار نوعی



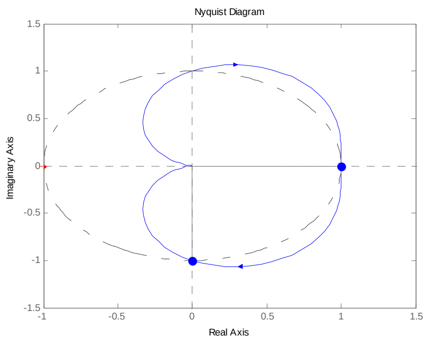


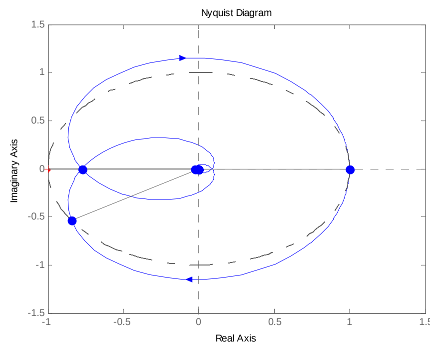
$$G(s)=\frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

$$G_{delay}(s)=\frac{ke^{-t_ds}}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

تحلیل پایداری نایکوئیست برای سیستم های تاخیردار

مثال ۷: (سیستم تاخیردار)



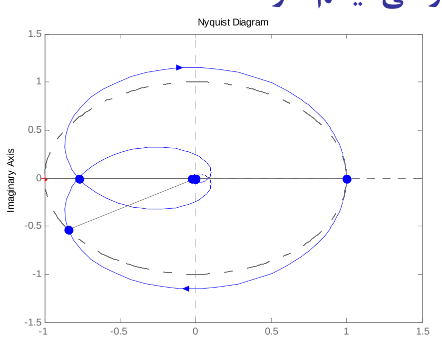


$$G(s)=\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$G_{delay}(s)=\frac{e^{-s}}{s^2+s+1}$$

تحلیل پایداری نایکوئیست برای سیستم های تاخیردار

شرط پایداری سیستم های تاخیردار می نیمم فاز



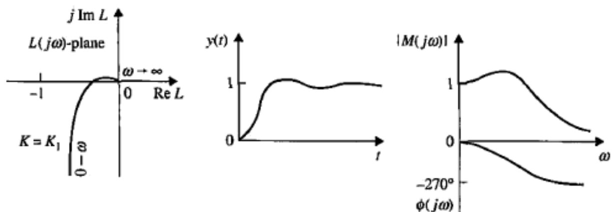
$$G_{delay}(s)=e^{-t_d s}G(s)$$

$$G(j\omega_c)=1\rightarrow \omega_c$$

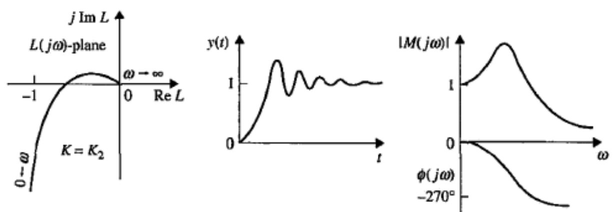
$$\measuredangle G(j\omega_c)-t_d\omega_c>180^o \Rightarrow t_d<\frac{\measuredangle G(j\omega_c)-180^o}{\omega_c}$$

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

مقایسه پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی



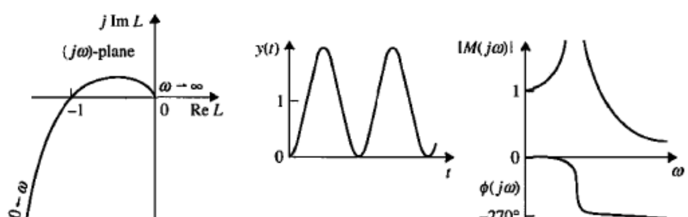
(a) Stable and well-damped system



(b) Stable but oscillatory system

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

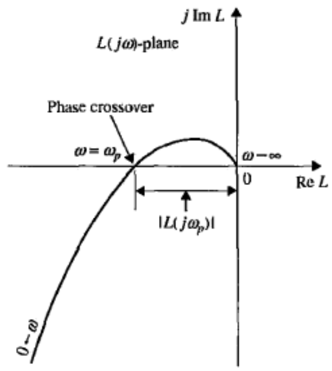
مقایسه پاسخ فرکانسی و پاسخ زمانی



(c) Marginally unstable system

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

حد بهره

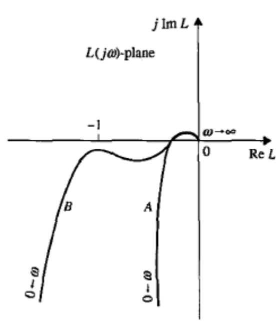


$$\measuredangle G(j\omega_p)=180^o \quad \Rightarrow \quad G.M.=20\log\frac{1}{|G(j\omega_p)|}=-20\log|G(j\omega_p)|$$

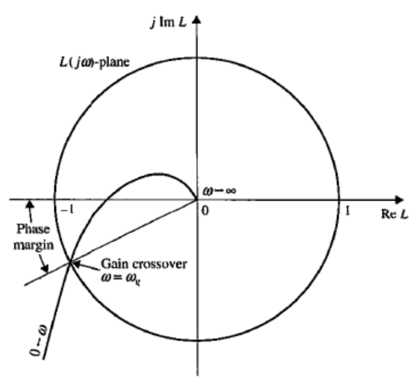
$$\textit{stability condition} \quad \Rightarrow \quad G.M.>0$$

تحلیل پایداری نسبی با استفاده از روش نایکوئیست

حد فاز



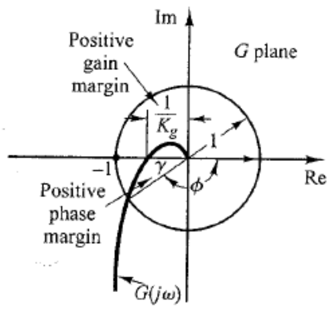
نقطه ضعف حد بهره



$$|G(j\omega_c)|=1 \quad \Rightarrow \quad P.M.=\measuredangle G(j\omega_c)-180$$

$$\textit{stability condition} \quad \Rightarrow \quad P.M.>0$$

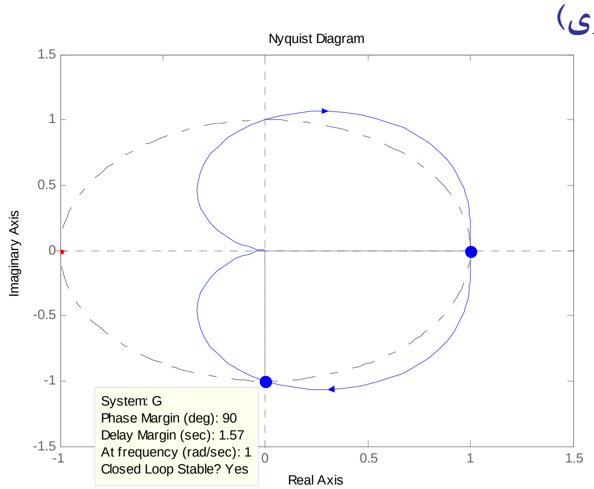
شرط پایداری مطلق در سیستم های می نیمم فاز



$$\begin{cases} G.M. > 0 \\ P.M. > 0 \end{cases}$$

تحلیل پایداری با استفاده از روش نایکوئیست

مثال ۸: (تحلیل پایداری)



$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

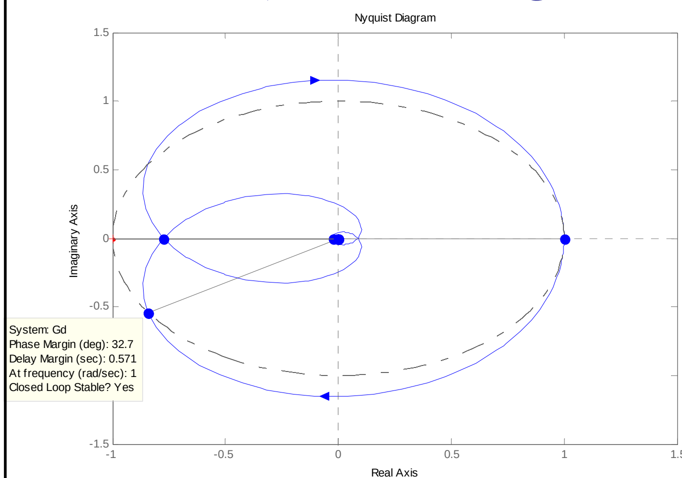
$$P.M. = 90^o = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega_c = 1$$

$$\boxed{t_d \omega_c < P.M. \Rightarrow t_d < 1.57^{(s)}}$$

تحلیل پایداری با استفاده از روش نایکوئیست در حضور تاخیر

ادامه مثال ۸:(ارتباط تاخیر زمانی و حد فاز در تحلیل پایداری)

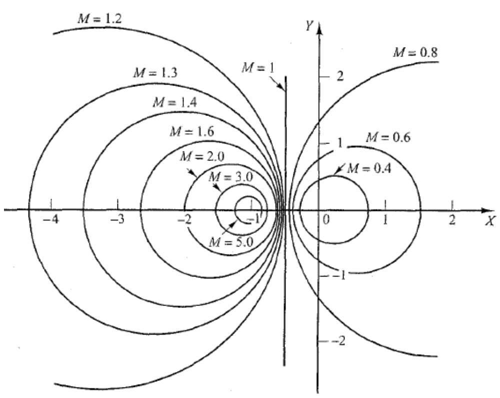


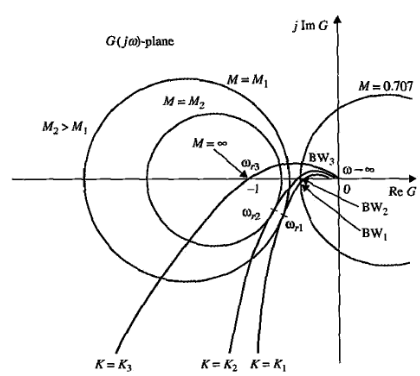
$$G_{delay}(s)=\frac{e^{-s}}{s^2+s+1}$$

دایره های با شعاع (دامنه) ثابت

$$G=x+Jy\rightarrow M=\frac{x+jy}{1+x+jy}\rightarrow |M|=\frac{|x+jy|}{|1+x+jy|}$$

$$\rightarrow M^2=\frac{x^2+y^2}{(1+x)^2+y^2}\Rightarrow\left(x+\frac{M^2}{M^2-1}\right)^2+y^2=\frac{M^2}{\left(M^2-1\right)^2}$$



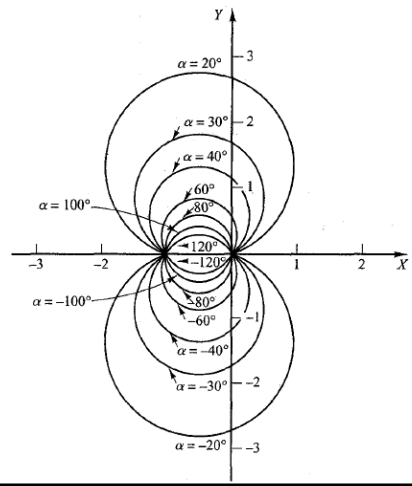


دایره های با فاز ثابت

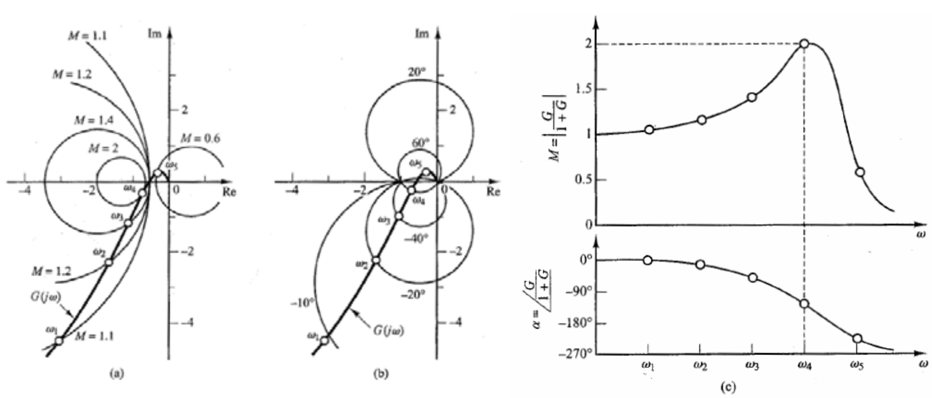
$$G = x + Jy \rightarrow M = \frac{x + jy}{1 + x + jy} \rightarrow \alpha = \measuredangle \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(\frac{y}{x}) - \tan^{-1}(\frac{y}{1+x}) \rightarrow N = \tan(\alpha) = \frac{y}{x^2 + x + y^2}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2N}\right)^2$$

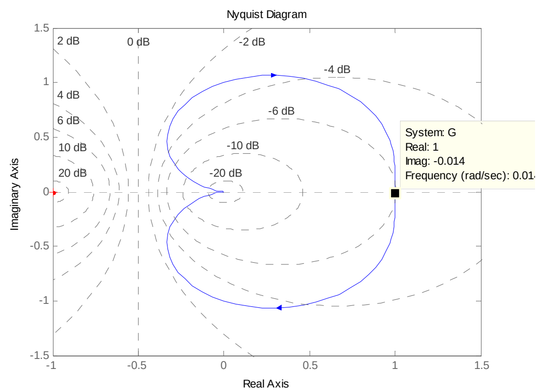


منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت



منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت

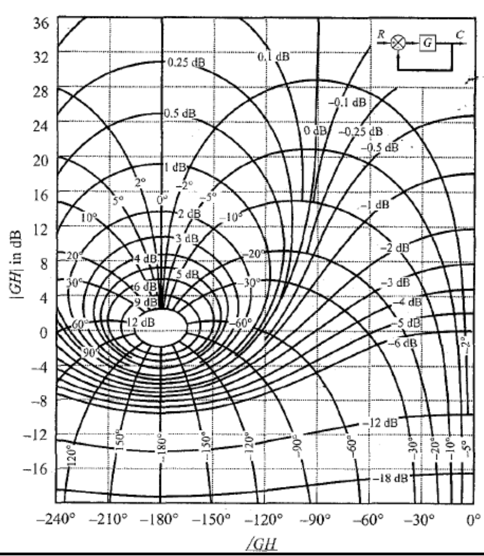
مثال ۹:



$$\left|M\right| = 10^{\frac{-6}{20}} = 0.5 = \frac{1}{1+!}$$

چارت نیکولز

از ترکیب مکان های (دایره های) دامنه ثابت با مکان های فاز ثابت در یک چارت که دامنه را بر حسب فاز رسم می نماید چارت نیکولز حاصل می شود:



$$-1 + j0 \leftrightarrow \left(0, -180^{o}\right)$$

چارت نیکولز

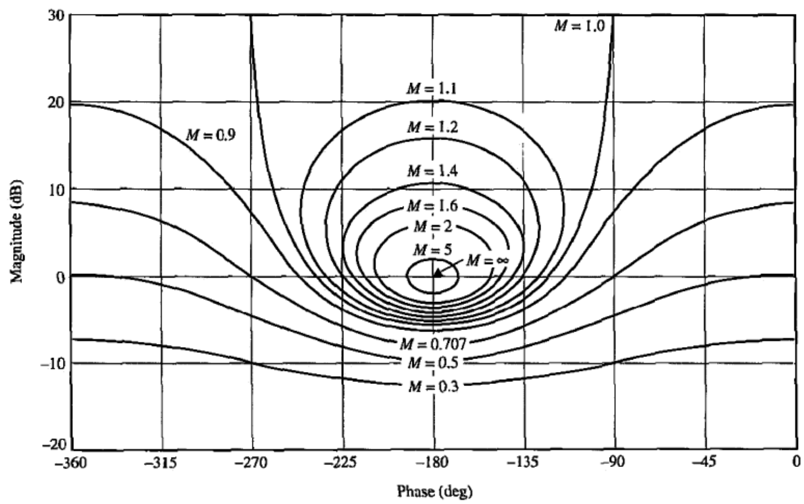
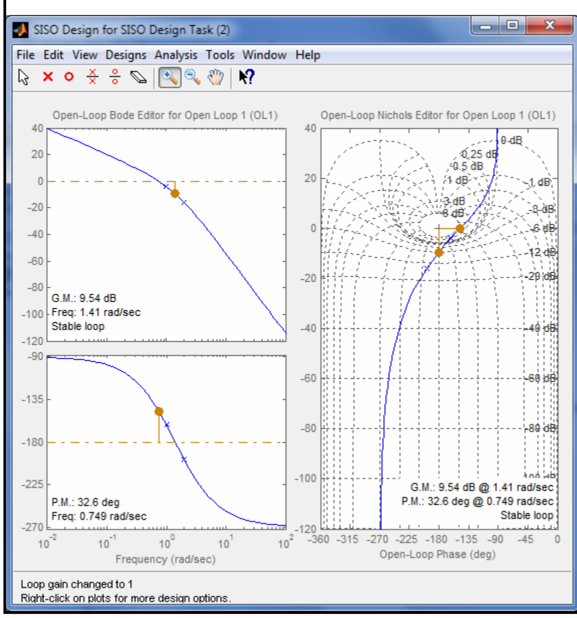


Figure 8-50 Nichols chart.

37

منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت

مثال ۱۰:

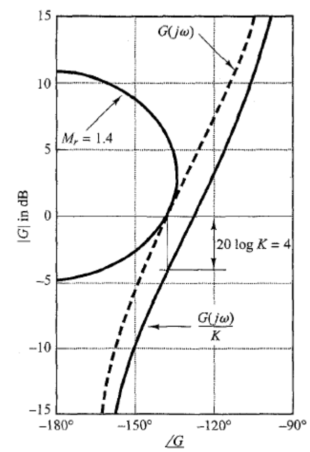


$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

38

منحنی نایکوئیست و دایره های با دامنه و فاز ثابت

مثال ۱۱: (محاسبه بهره به منظور دست یافتن به رفتار حلقه بسته مطلوب)



$$G(s)=\frac{k}{s(s+1)}$$

$$20\log k = 4 \Rightarrow k = 1.59$$

نمودار Bode

نمودار Bode نمایشی دیگر از پاسخ فرکانسی را در اختیار می گذارد که در آن نمودار دامنه بر حسب فرکانس و نمودار فاز بر حسب فرکانس جداگانه رسم می گردند. مزایای نمودار bode عبارتند از:

۱- امکان رسم آن بدون استفاده از کامپیوتر

۲- امکان استخراج پارامترهای مهم از جمله فرکانس های عبور و حد بهره و فاز از روی نمودارbode

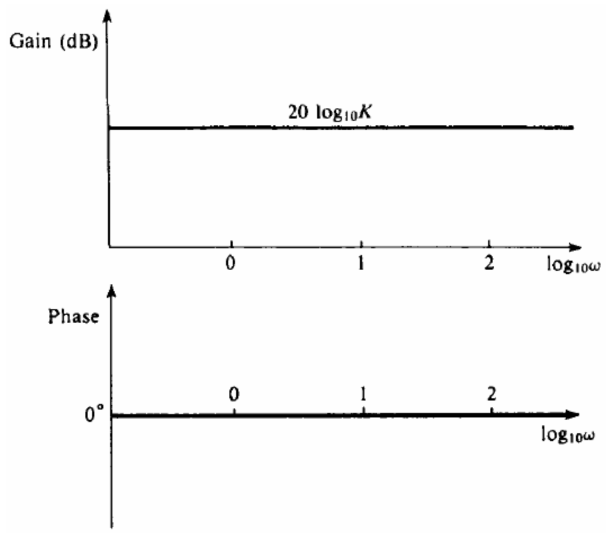
۳- اثر حضور جبرانساز ها و کنترل کننده ها بصورت ساده ای امکان پذیر است.

نقطه ضعف: تحلیل های پایداری مبتنی بر نمودار bode فقط برای سیستم های مینیمم فاز صحیح است.

نمودار Bode

نمودار bode بهره ثابت

$G(s) = k$

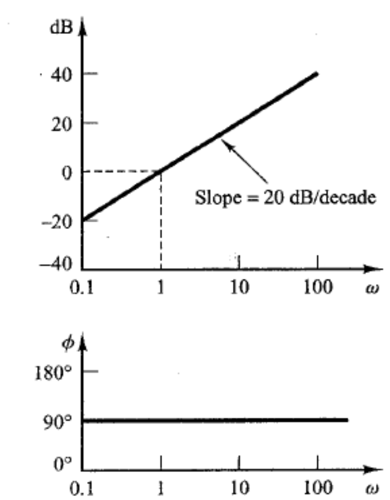


41

نمودار Bode

نمودار bode صفر در مبدا

$G(s) = s$

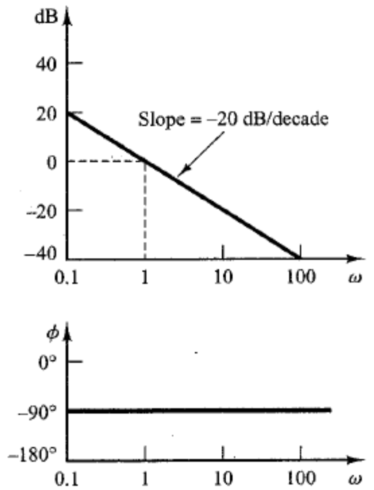


42

نمودار Bode

نمودار bode قطب در مبدا

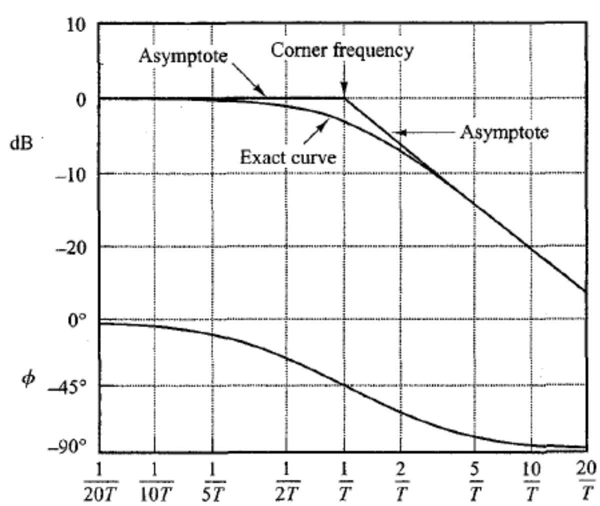
$$G(s) = \frac{1}{s}$$



نمودار Bode

نمودار bode قطب حقیقی

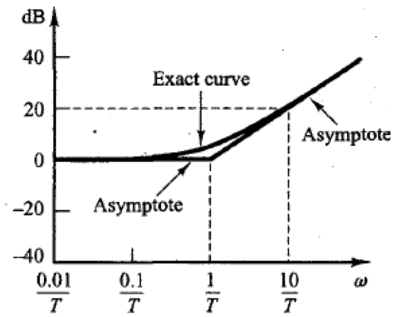
$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

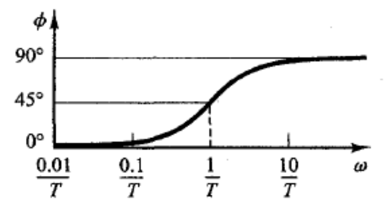


نمودار Bode

$G(s) = Ts + 1$

نمودار bode صفر حقیقی



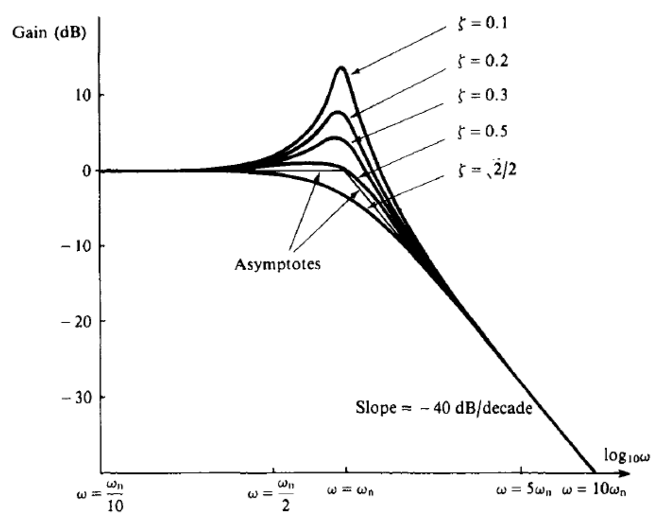


45

نمودار Bode

$G(s) = \frac{k}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

نمودار bode قطب مزدوج مختلط

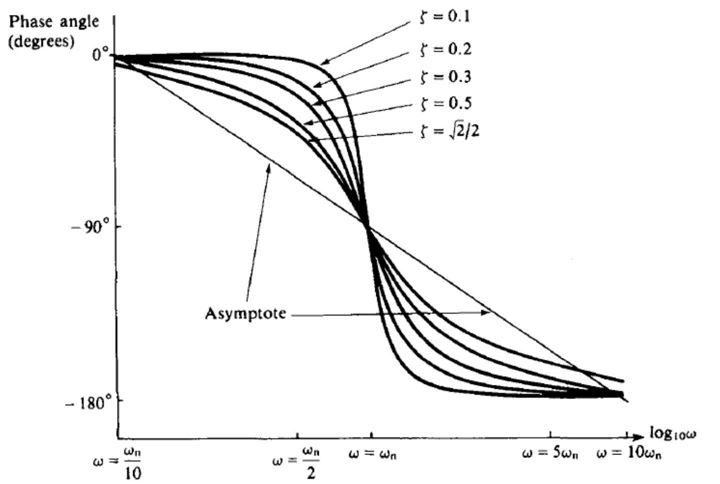


46

نمودار Bode

$$G(s)=\frac{k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$$

نمودار bode قطب مزدوج مختلط

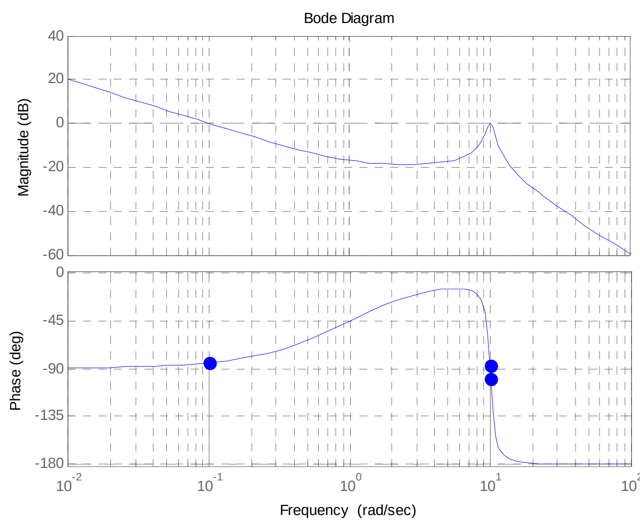


47

نمودار Bode

$$G(s)=\frac{10(s+1)}{s(s^2+s+100)}$$

مثال ۱۲:



Linear Control Systems
By: Dr B. Moaveni

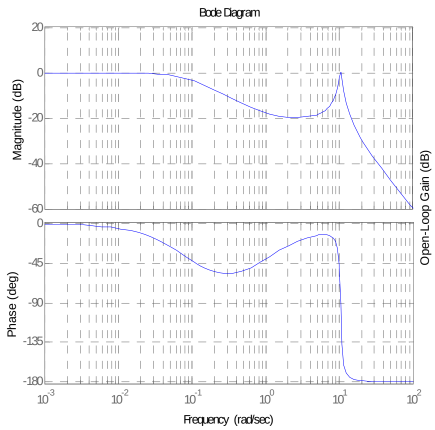
48

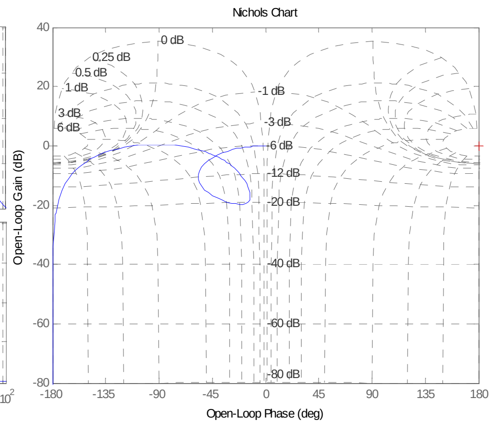
نمودار Bode

$$G(s)=\frac{10(s+1)}{s(s^2+s+100)}$$

ادامه مثال ۱۲: (نتایج یکسان در نمودار بود
حلقه بسته و چارت نیکولز)

$$T=\frac{G}{1+G}$$

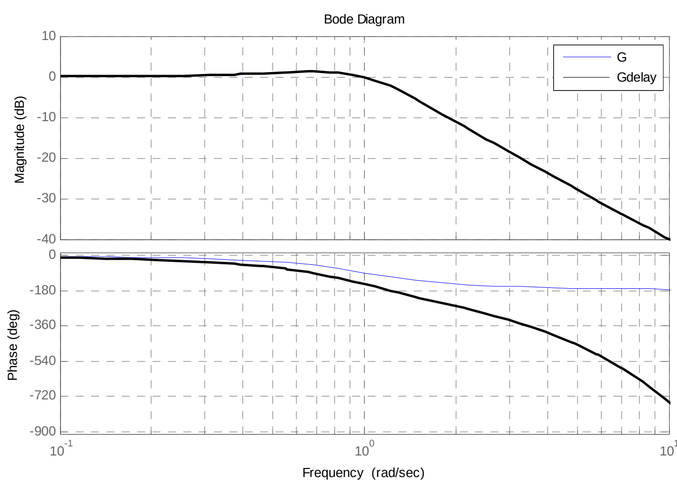




نمودار Bode سیستم های تاخیردار

مثال ۱۳:

$$G_{delay}(s)=\frac{e^{-s}}{s^2+s+1}$$



باسمه تعالی

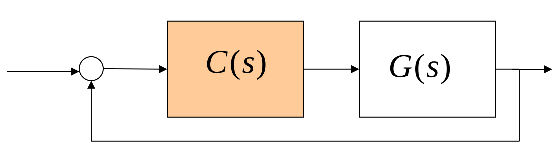
سیستم های کنترل کلاسیک

Lecture 8

طراحی جبرانساز ها درحوزه فرکانس

مقدمه

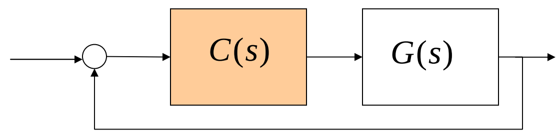
پس از مباحث مربوط به تحلیل عملکرد و تحلیل پایداری سیستم ها در بخش های پیشین، در صورتی که رفتار مطلوب حاصل نگردد، طراحی جبران سازها و کنترل کننده مورد توجه قرار می گیرد. این بخش به معرفی جبرانسازها و نحوه طراحی آنها خواهد پرداخت.



جبرانساز پیش افت فاز (Phase Lead Comp.)

معرفی:

$$C(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts},\quad a>1$$

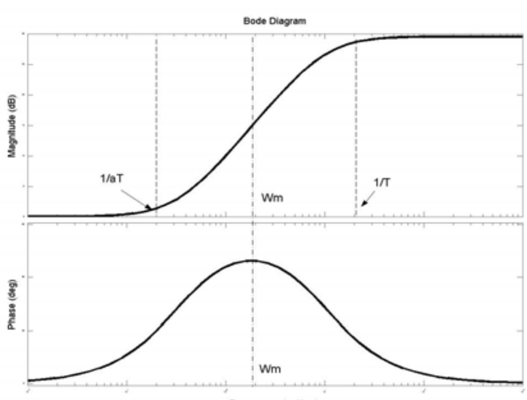


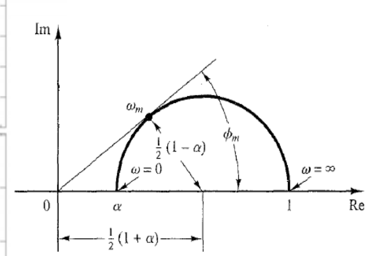
۱- این جبرانساز با افزایش فاز به بهبود رفتار سیستم کمک خواهد نمود.
۲- خطای حالت ماندگار را تغییر نمی دهد. (ولیکن با اضافه نمودن بهره ثابت می توان در جهت کاهش خطای حالت ماندگار تلاش نمود)
۳- این کنترل کننده موجب افزایش سرعت سیستم و/یا به عبارت دیگر کاهش زمان نشست می گردد. این امر به علت افزایش پهنای باند صورت می گیرد.
۴- کاهش فراجهش
۵- بهبود پایداری

جبرانساز پیش افت فاز (Phase Lead Comp.)

نمودار Bode جبرانساز lead:

$$C(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts},\quad a>1$$



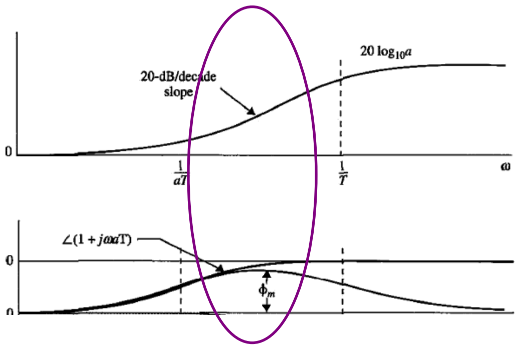


جبرانساز پیش افت فاز (Phase Lead Comp.)

روابط حاکم بر جبرانساز Lead:

$$C(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts},\quad a>1$$

$$\omega_m^2=\frac{1}{T}\frac{1}{aT}\Rightarrow \boxed{\omega_m=\frac{1}{\sqrt{aT}}}$$



$$\tan\phi_m=\frac{a-1}{2\sqrt{a}}\Rightarrow \sin\phi_m=\frac{a-1}{a+1}\longrightarrow \boxed{a=\frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}}$$

طراحی جبرانساز پیش افت فاز

روند طراحی:

۱- محاسبه مقدار بهره ثابت (k), برای رسیدن به مقدار خطای حالت ماندگار مطلوب.

۲- رسم نمودار بود تابع تبدیل حلقه باز با حضور بهره ثابت ($kG(s)$) و محاسبه مقدار حاشیه فاز(ϕ_O) برای آن.

۳- محاسبه مقدار حاشیه فاز مطلوب(ϕ_d), با توجه به خواص مطلوب مساله(فراجهش و ...) و استفاده از رابطه ($\phi_d=100\xi$).

۴- محاسبه مقدار فاز لازم برای جبران: $\boxed{\phi_m=\phi_d-\phi_O}$

۵- محاسبه مقدار a با استفاده ه از

$$\boxed{a=\frac{1+\sin\phi_m}{1-\sin\phi_m}}$$

طراحی جبرانساز پیش افت فاز

ادامه روند طراحی:

فرکانس ω_m عبارت است از فرکانسی که در آن $20\log_{10} G(j\omega_m) = -10\log_{10} a$

۶- محاسبه مقدار T با استفاده از $T = \dfrac{1}{\sqrt{a}\omega_m}$

۷- رسم نمودار **Bode** سیستم جبران شده و بررسی درستی طراحی

طراحی جبرانساز پیش افت فاز

مثال ۱:

برای سیستم زیر یک جبرانساز پیش افت فاز طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s) = \frac{2500}{s(s+25)}$$

$$\begin{cases} e_{ss}\,|_{r(t)=tu(t)} \le 0.01 \\ Ph.M = 45^o \end{cases}$$

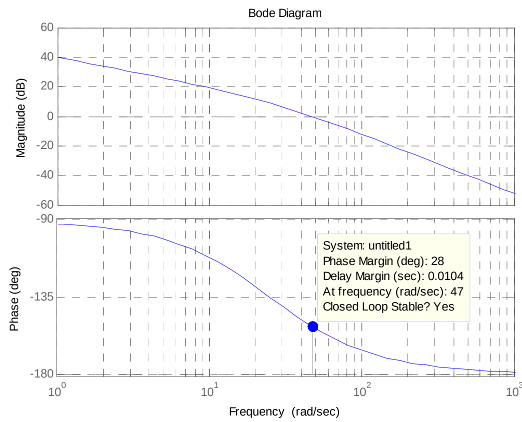
$$e_{ss}\,|_{r(t)=tu(t)} \le 0.01 \Rightarrow k \ge 1$$

طراحی جبرانساز پیش افت فاز

مثال ۱:

$$G(s)=\frac{2500}{s(s+25)}$$

$$\begin{cases} e_{ss}\,|_{r(t)=tu(t)} \le 0.01 \\ Ph.M = 45^o \end{cases}$$



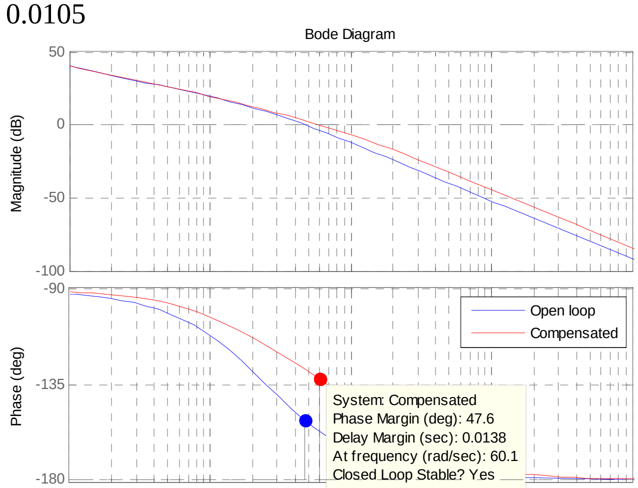
$$Ph.M. = 45 = \phi_d \;\Rightarrow\; \phi_m = \phi_d - \phi_o = 45 - 28 = 17 \Rightarrow \phi_m = 25$$

طراحی جبرانساز پیش افت فاز

$$G(s)=\frac{2500}{s(s+25)}$$

ادامه مثال ۱:

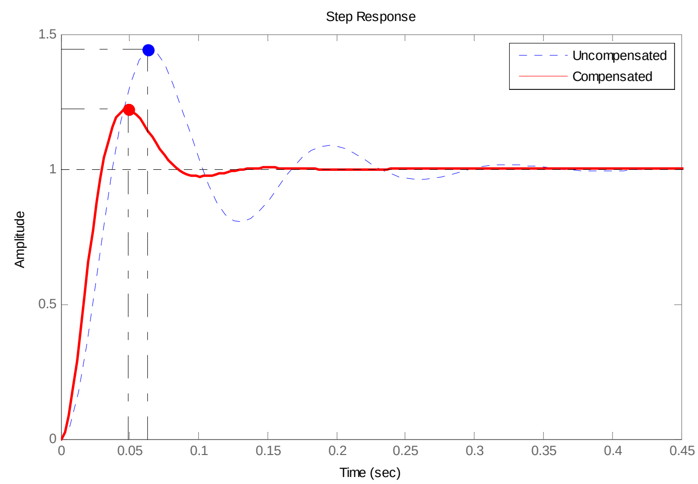
$$\omega_m = 60.4 \longrightarrow T = 0.0105$$



$$G(s)=\frac{2500}{s(s+25)}$$

طراحی جبرانساز پیش افت فاز

ادامه مثال ۱: (پاسخ پله سیستم جبران شده)

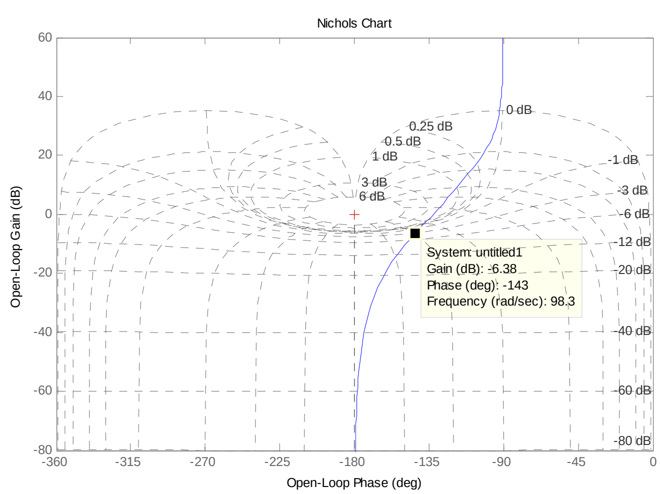


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

$$G(s)=\frac{2500}{s(s+25)}$$

طراحی جبرانساز پیش افت فاز

ادامه مثال ۱: (خواص حلقه بسته)

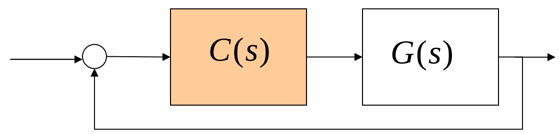


Linear Control Systems
By: Dr B. moaveni

جبرانساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

معرفی:

$$C(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts},\quad a<1$$



۱- خطای حالت ماندگار را تغییر نمی دهد. (ولیکن با اضافه نمودن بهره ثابت می توان در جهت کاهش خطای حالت ماندگار تلاش نمود)

۲- این کنترل کننده موجب کاهش سرعت سیستم و/یا به عبارت دیگر افزایش زمان نشست می گردد. این امر به علت کاهش پهنای باند صورت می گیرد.

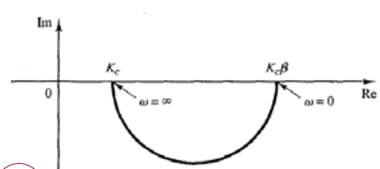
۳- کاهش فراجهش

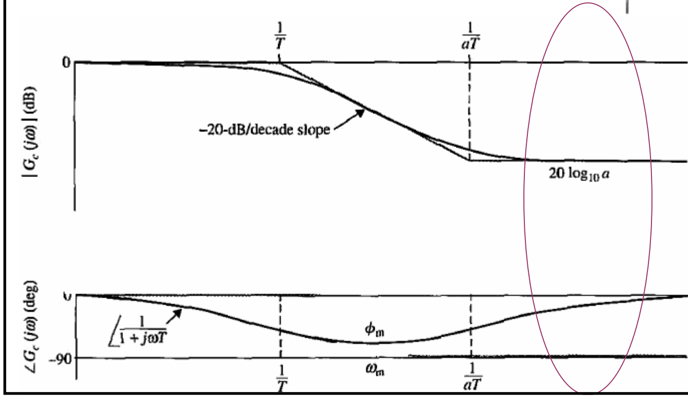
۴- بهبود پایداری

جبرانساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

نمودار Bode جبرانساز lag:

$$C(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts},\quad a<1$$





جبرانساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

$$C(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts},\quad a<1$$

روند طراحی:

۱- محاسبه مقدار بهره ثابت (k)، برای رسیدن به مقدار خطای حالت ماندگار مطلوب.

۲- رسم نمودار بود تابع تبدیل حلقه باز با حضور بهره ثابت ($kG(s)$) و محاسبه مقدار حاشیه فاز(ϕ_o) برای آن.

۳- تعیین فرکانسی (ω_c) که اگر این فرکانس به فرکانس گذر بهره تبدیل گردد، بتوان به مقدار حدفاز لازم دست یافت.

۴- جابجا نمودن منحنی دامنه به اندازه ای که ω_c به فرکانس گذر بهره تبدیل گردد.

بر اساس رابطه:

$$20\log_{10} a+20\log_{10}\left(G(j\omega_c)\right)=0 \quad\rightarrow\quad 20\log_{10} a+\left|G(j\omega_c)\right|_{dB}=0$$

جبرانساز پس افت فاز (Phase Lag Comp.)

$$C(s)=\frac{1+aTs}{1+Ts},\quad a<1$$

ادامه روند طراحی:

۵- به منظور حذف اثر کاهش فاز لازم است دره فاز به فرکانس های پایین تر انتقال یابد. لذا

$$\frac{1}{aT}<<\omega_c \Rightarrow \frac{1}{aT}=\frac{\omega_c}{10}$$

۶- رسم نمودار Bode سیستم جبران شده و تحلیل نتایج حاصل.

طراحی جبرانساز پس افت فاز

مثال ۲:

برای سیستم زیر یک جبرانساز پس افت فاز طراحی نمایید که شرایط زیر را برآورده نماید.

$$G(s)=\frac{2500}{s(s+25)} \qquad \begin{cases} e_{ss}\,|_{r(t)=tu(t)} \le 0.01 \\ Ph.M = 45^o \end{cases}$$

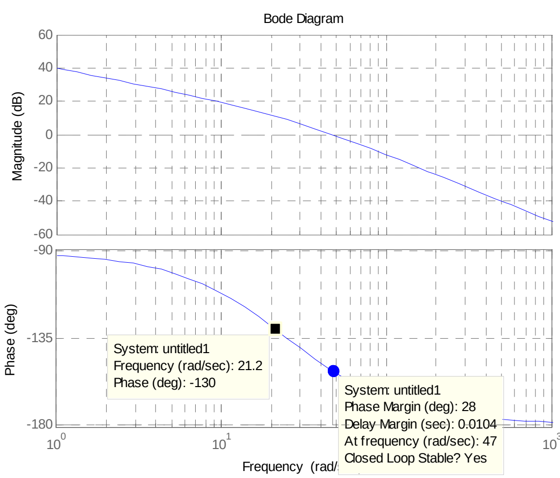
$$e_{ss}\,|_{r(t)=tu(t)} \le 0.01 \Rightarrow k \ge 1$$

طراحی جبرانساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲:

۲- رسم نمودار Bode، $kG(s)$ و بررسی حدفاز حلقه باز

۳- تعیین فرکانس ω_c

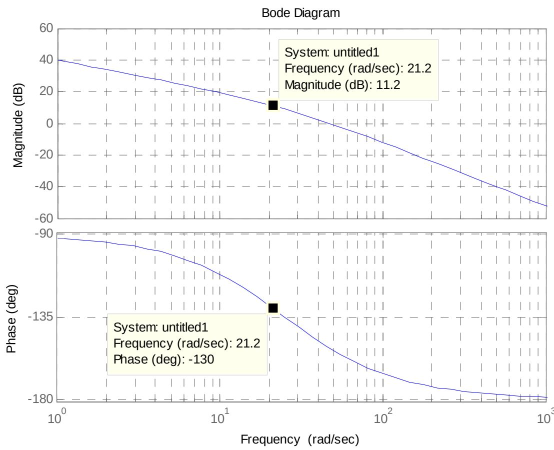


طراحی جبرانساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲:

۴- تعیین مقدار a

$$20\log_{10} a + 11.2 = 0 \Rightarrow a = 0.2754$$



19

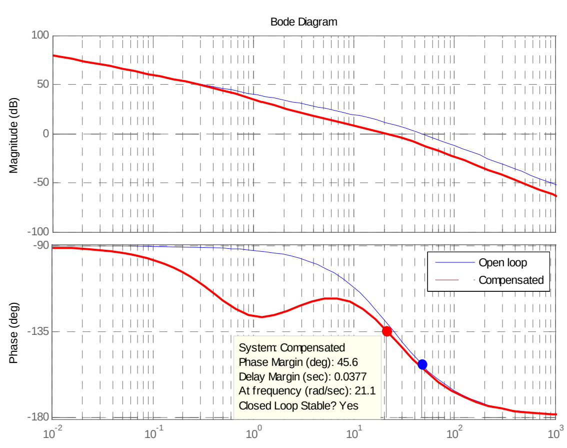
طراحی جبرانساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲:

۵- تعیین مقدار T

$$\frac{1}{aT} = \frac{\omega_c}{10} \Rightarrow T = 1.7126$$

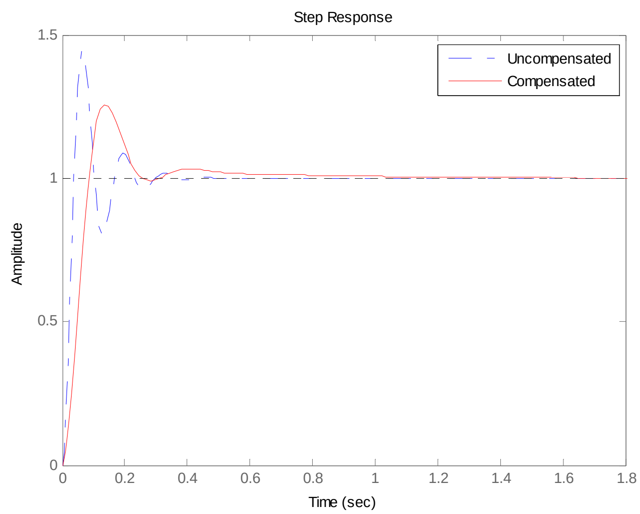
۶- رسم نمودار **Bode** سیستم جبران شده



20

طراحی جبرانساز پس افت فاز

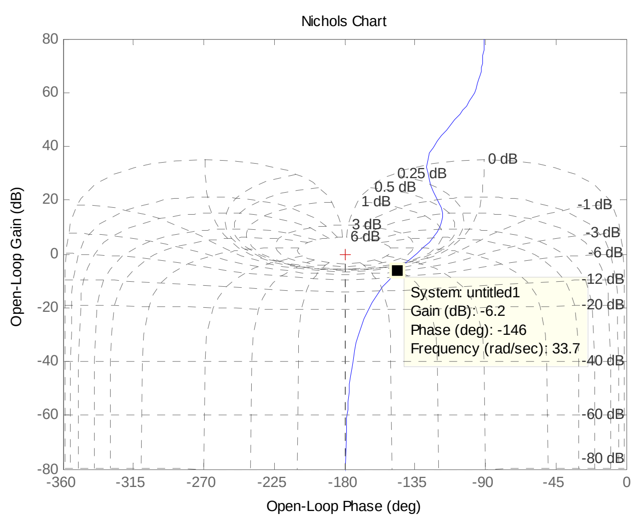
ادامه مثال ۲: (پاسخ زمانی)



21

طراحی جبرانساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲: (خواص حلقه بسته)



22

طراحی جبرانساز پس افت فاز

ادامه مثال ۲: (بررسی حساسیت)